Beiträge zur Theorie der analytischen Fortsetzung in elementarer Behandlungsweise.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der II. Sektion einer hohen Philosophischen Fakultät
der K. B. Ludwig-Maximilians-Universität

vorgelegt am 23. November 1913

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Dezember 1913

von

Else Schöll.

München 1914.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Beiträge zur Theorie der analytischen Fortsetzung in elementarer Behandlungsweise.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der II. Sektion einer hohen Philosophischen Fakultät
der K. B. Ludwig-Maximilians-Universität

vorgelegt am 23. November 1913

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Dezember 1913

von

Else Schöll.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

München 1914.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552317_0018

Den Ausgangspunkt dieser Arbeit bildet Borels sogenannter verallgemeinerter Grenzwert und zwar nicht in der von Borel fast ausschließlich studierten Umformung in ein bestimmtes Integral

a) $$\int_0^\infty e^{-t}\left(\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu \frac{t^\nu}{\nu!}\right) dt,$$

sondern in der ursprünglichen Form des Grenzwertes einer Art von Mittelwertbildung (auch als exponentielle Summation bezeichnet), nämlich

b) $$\lim_{t=\infty}\lim_{n=\infty}\frac{\sum_0^n{}^{\nu}\frac{t^\nu}{\nu!}s_\nu(x)}{\sum_0^\infty{}^{\nu}\frac{t^\nu}{\nu!}}, \quad \text{kürzer:} \quad \lim_{t=\infty} e^{-t}\sum_0^\infty{}^{\nu}\frac{t^\nu}{\nu!}s_\nu(x),$$

wobei $$s_\nu(x) = \sum_0^{\nu-1}{}^{\lambda} a_\lambda x^\lambda.$$

Bei dieser Auffassung fällt die Notwendigkeit fort, fast alle wesentlichen Aussagen auf den Begriff der absoluten Summabilität zu basieren, welcher bei Borel eine wesentliche Rolle spielt und der zu summierenden Reihe erhebliche Beschränkungen auferlegt. Eine ebenfalls nicht auf die Integralform gegründete Darstellung findet sich zwar schon bei Hanni[1]),

---

[1]) a) „Über Borels Verallgemeinerung des Grenzbegriffes." Monatshefte für Mathematik und Physik XII.
b) „Zurückführung der allgemeinen Mittelbildung Borels auf Mittag-Lefflers $n$fach unendliche Reihen." Ebendaselbst XIV.
c) „Über die Beziehungen zwischen der Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monogenen Funktion durch Herrn Mittag-Leffler, der Methode der Mittelwerte durch Herrn Borel und der Transformation durch Herrn Lindelöf." Acta math. 29, p. 25.

doch gestattet der von ihm eingeschlagene Weg, nämlich die Umformung des Ausdrucks b) in eine unendliche Doppelreihe keine weiteren Schlüsse auf die Eigenschaften des verallgemeinerten Grenzwertes. In der vorliegenden Arbeit wird zunächst im Anschluß an die Arbeit von Herrn Pringsheim über die Eulersche Transformation[1]) der Versuch gemacht, den wesentlichen Nutzen des verallgemeinerten Grenzwertes, nämlich die Eigenschaft, eine analytische Funktion in einem gewissen Bereiche, dem inneren des sogenannten Summationspolygons darzustellen, auf elementarem Wege zu erweisen.

Dieser Beweis bildet der Hauptsache nach den Inhalt des ersten Paragraphen. Da aber hierbei der Funktion gewisse Beschränkungen hinsichtlich ihrer Singularitäten auferlegt werden müssen, während die Allgemeingültigkeit der erwähnten Eigenschaft bisher nur mit Hilfe der komplexen Integration nachgewiesen werden konnte, erschien es wünschenswert, ein elementares Ersatzmittel für das Cauchysche Randintegral einzuführen, welches im Innern des ganzen Regularitätsbereiches der Funktion dieselben Dienste leistet wie der Mittelwert

$$\text{c)} \qquad \mathfrak{M}f(r) = \lim_{N=\infty} \frac{1}{N} \sum_{0}^{N-1} f\left(e^{\frac{2\nu\pi i}{N}} \cdot r\right)^{2})$$

im Innern des Konvergenzkreises. Der von Herrn Pringsheim herrührende Gedanke, einen ähnlichen Mittelwert über einen Ringsektor zu erstrecken, leistet in der Tat das Verlangte, indem er es ermöglicht, den Begriff des komplexen Kurvenintegrals und sogar auch denjenigen des reellen Integrals aus der Funktionentheorie auszuschalten.

Im § 2 werden zunächst Definition und Existenzbeweis dieses Mittelwertes gegeben und die Haupteigenschaften desselben abgeleitet. Sodann wird gezeigt, inwiefern er sich dazu

---

[1]) „Über einige funktionentheoretische Anwendungen der Eulerschen Reihentransformation." Münchener Sitzungsberichte, Dez. 1911.

[2]) „Über Vereinfachungen in der elementaren Theorie der analytischen Funktionen." Math. Annalen 47, p. 121.

eignet, eine analytische Funktion im Innern ihres Regularitätsbereiches darzustellen. Es folgen ebenfalls mit Benützung dieses Mittelwertes die Beweise einiger funktionentheoretischer Sätze, zunächst derjenige des Hadamardschen Satzes über den Zusammenhang der Singularitäten dreier analytischer Funktionen mit den Anfangselementen

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu, \quad \sum_0^\infty{}^{\nu} b_\nu x^\nu, \quad \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu b_\nu x^\nu.$$

Aus diesem Satze wird dann ein analoger, zuerst von Hurwitz auf anderem Wege bewiesener abgeleitet. Schließlich wird noch gezeigt, daß das von Borel angegebene, auf das Cauchysche Randintegral gegründete Verfahren aus einer besonderen Darstellung von $\frac{1}{1-x}$ die Mittag-Lefflersche Entwicklung einer beliebigen Funktion $f(x)$ innerhalb ihres sogenannten Zentralsterns herzuleiten, sich auch auf den hier eingeführten Mittelwert übertragen läßt.

Dieses Resultat liefert die Möglichkeit, Borels Methode der exponentiellen Summation auch auf beliebige, im Nullpunkt reguläre, hinsichtlich ihrer Singularitäten aber keiner Beschränkung mehr unterliegende analytische Funktion anzuwenden, wie in § 3 bewiesen wird. Um ferner für ein Gebiet, welches sich dem Innern des Mittag-Lefflerschen Zentralsterns beliebig annähern läßt, ein spezielles Darstellungsmittel zu erhalten, wird sodann derjenige Grenzwert untersucht, welcher durch iterierte Anwendung der exponentiellen Summation entsteht.

§ 4 enthält zunächst den Beweis eines allgemeinen, zuerst auf anderem Wege, nämlich unter Zugrundelegung der Integralform a) von Hardy bewiesenen Satzes über den verallgemeinerten Grenzwert. Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich dann ein Kriterium dafür aufstellen, ob eine Stelle des Konvergenzkreises eine singuläre ist oder nicht. Daran anknüpfend wird schließlich noch eine hinreichende Bedingung für die Nichtfortsetzbarkeit einer Reihe über ihren Konvergenzkreis bewiesen.

§ 1.

Es soll nun untersucht werden, inwieweit Borels verallgemeinerter Grenzwert verwendbar ist, die analytische Fortsetzung einer durch ihr Anfangselement definierten Funktion darzustellen. Nach einer von Herrn Pincherle mit Hilfe seines „calcul distributif“ von Herrn Pringsheim mit Hilfe der Eulerschen Transformation[1]) abgeleiteten Formel ist

1)
$$\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu b_\nu x^\nu = \sum_0^\infty{}^{\lambda} f_\lambda(s) \left(\frac{x}{s}\right)^\lambda \frac{f_b^\lambda\left(\frac{x}{s}\right)}{\lambda!},$$

falls

$f_a(x)$ das Funktionselement: $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu$

$f_b(x)$ „ „ $\sum_0^\infty{}^{\nu} b_\nu x^\nu$

$f_{ab}(x)$ „ „ $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu b_\nu x^\nu$

und dessen analytische Fortsetzungen vorstellt.

Dabei bedeutet

$$\frac{f_b^\lambda\left(\frac{x}{s}\right)}{\lambda!}$$

die Reihe

$$\sum_\lambda^\infty{}^{\nu} \binom{\nu}{\lambda} b_\nu \left(\frac{x}{s}\right)^{\nu-\lambda}$$

eventuell ihre analytische Fortsetzung und die rechte Seite von 1) stellt, soweit sie gleichmäßig konvergiert, die analytische Fortsetzung der linken dar.

---

[1]) „Über einige funktiontheoretische Anwendungen der Eulerschen Reihentransformation.“ Münchener Sitzungsberichte 1911, p. 66, Formel (90).

Die Anwendung dieser Formel auf die Funktionen

$$f_a(x) = f(x)$$
$$f_b(x) = \lim_{t=\infty} \frac{1}{1-x}(1 - e^{-t(1-x)})$$

führt zu der Darstellung des Borelschen verallgemeinerten Grenzwerts.

Für $\Re(1-x) > 0$ ist aber

2) $$\lim_{t=\infty} e^{-t(1-x)} = 0, \quad \text{also } f_b(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Im Innern des Einheitskreises besitzt also $f_b(x)$ die Reihenentwicklung

$$f_b(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} x^\nu, \qquad b_\nu = 1.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann auch der Konvergenzkreis der Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu$ gleich 1 vorausgesetzt werden. Dann ist im Innern des Einheitskreises

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu b_\nu x^\nu = \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu.$$

Formel 1) geht also über in

3) $$\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu = \sum_0^\infty{}^{\lambda} \left\{ A_\lambda(s) \left(\frac{x}{s}\right)^\lambda D_x^\lambda \lim_{t=\infty} \frac{1}{1-x}(1-e^{-t(1-x)}) \cdot \frac{1}{\lambda!} \right\}.$$

Es ist aber

4) $$D_x^\lambda \lim_{t=\infty} \frac{1}{1-x}(1-e^{-t(1-x)}) \frac{1}{\lambda!}$$
$$= \lim_{t=\infty} \frac{1}{(1-x)^{\lambda+1}} \left\{ 1 - e^{-t(1-x)} \cdot \sum_0^\lambda{}^{\nu} \frac{t^\nu (1-x)^\nu}{\nu!} \right\},$$

wie sich durch vollständige Induktion ergibt. Für $\lambda = 1$ folgt die Richtigkeit der Formel 4) durch Differentiation

$$D_x^1 \lim_{t=\infty} \frac{1-x}{1}(1-e^{-t(1-x)}) = \lim_{t=\infty} \frac{1}{(1-x)^2} \left\{ 1 - e^{-t(1-x)} \sum_0^1{}^{\nu} \frac{t^\nu (1-x)^\nu}{\nu!} \right\}.$$

Angenommen dieselbe gälte für ein bestimmtes λ, so findet man durch Differentiation

$$D_x^{\lambda+1} \lim_{t=\infty} \frac{1}{1-x}(1-e^{-t(1-x)})\frac{1}{\lambda+1!}$$

$$= \lim_{t=\infty}\left[\frac{1}{(1-x)^{\lambda+2}}\left\{1-e^{-t(1-x)}\cdot\sum_0^\lambda{}^{\nu}\frac{t^\nu(1-x)^\nu}{\nu!}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{e^{-t(1-x)}}{(\lambda+1)(1-x)}\sum_0^\lambda{}^{\nu}\frac{t^{\nu+1}(1-x)^\nu}{\nu!}+\frac{e^{-t(1-x)}}{(\lambda+1)(1-x)}\sum_1^\lambda{}^{\nu}\frac{t^\nu(1-x)^{\nu-1}}{\nu!}\right\}\right]$$

$$= \lim_{t=\infty}\frac{1}{(1-x)^{\lambda+2}}\left[1-e^{-t(1-x)}\sum_0^{\lambda+1}{}^{\nu}\frac{t^\nu(1-x)^\nu}{\nu!}\right].$$

Also gilt Formel 4) allgemein und es geht Gleichung 3) über in

5)
$$\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu$$

$$= \sum_0^\infty{}^{\lambda} A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda \lim_{t=\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\lambda+1}}\left\{1-e^{-t\left(1-\frac{x}{s}\right)}\cdot\sum_0^\lambda{}^{\nu}\frac{t^\nu\left(1-\frac{x}{s}\right)^\nu}{\nu!}\right\}$$

wobei die rechte Seite, soweit die Reihe gleichmäßig konvergiert, die analytische Fortsetzung der linken darstellt. Angenommen die Funktion $f(x)$ habe die einzige singuläre Stelle $x = s$, dann sind, wie in der oben zitierten Arbeit[1]) bewiesen wird, die Koeffizienten a_ν von der Form

$$a_\nu = \frac{1}{s^\nu}g(\nu),$$

wenn $g(y)$ eine ganze rationale oder eine ganze, höchstens dem Minimaltypus der ersten Ordnung angehörende, transzendente Funktion bedeutet und die durch die Eulersche Transformation aus der Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu$ hervorgehende Reihe

---

[1]) A. a. O., p. 47, Nr. 8.

$$\sum_0^\infty{}^{\lambda} A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\lambda+1}}$$

stellt eine ganze transzendente Funktion von

$$\frac{\frac{x}{s}}{1-\frac{x}{s}}$$

dar. Die Funktion $f_{ab}(x)$ aber ist in demselben Umfange regulär wie $f_b(x)$ und wird durch den Ausdruck

$$\sum_0^\infty{}^{\lambda} A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda \frac{f_b^\lambda\left(\frac{x}{s}\right)}{\lambda!}$$

dargestellt. Ist also

$$f_b\left(\frac{x}{s}\right) = \lim_{t=\infty} \frac{1}{1-\frac{x}{s}}\left(1-e^{-t\left(1-\frac{x}{s}\right)}\right)$$

so wird, falls wir setzen

$$x = \xi + \eta i$$
$$s = \varrho + \sigma i,$$

der Regularitätsbereich dieser Funktion diejenige Halbebene, welche von der Geraden

$$\xi\varrho + \eta\sigma = \varrho^2 + \sigma^2$$

begrenzt wird und welche den Nullpunkt enthält; denn für alle Punkte dieser Halbebene ist

$$\Re\left(1-\frac{x}{s}\right) > 0.$$

Die Funktion $f(x)$ wird also durch die rechte Seite der Formel 5) für alle x, welche in der Halbebene

$$\Re\left(1-\frac{x}{s}\right) > 0$$

liegen, dargestellt. In diesem Ausdruck darf aber Summation und Grenzübergang vertauscht werden, denn es ist

$$f(x) = \sum_0^\infty{}^{\lambda} \frac{A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda}{\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\lambda+1}}$$

$$= \sum_0^\infty{}^{\lambda} A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda \lim_{t=\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\lambda+1}} \left\{1 - e^{-t\left(1-\frac{x}{s}\right)} \sum_0^\lambda{}^{\nu} \frac{t^\nu \left(1-\frac{x}{s}\right)^\nu}{\nu!}\right\}$$

und es läßt sich zeigen, daß die Differenz

$$D = \left[\sum_0^\infty{}^{\lambda} A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda \lim_{t=\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\lambda+1}} \left\{1 - e^{-t\left(1-\frac{x}{s}\right)} \sum_0^\lambda{}^{\nu} \frac{t^\nu \left(1-\frac{x}{s}\right)^\nu}{\nu!}\right\}\right.$$

$$\left. - \lim_{t=\infty} \sum_0^\infty{}^{\lambda} A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda \frac{1}{\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\lambda+1}} \left\{1 - e^{-t\left(1-\frac{x}{s}\right)} \sum_0^\lambda{}^{\nu} \frac{t^\nu \left(1-\frac{x}{s}\right)^\nu}{\nu!}\right\}\right]$$

$$= \lim_{t=\infty} \frac{A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda}{\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\lambda+1}} \cdot e^{-t\left(1-\frac{x}{s}\right)} \cdot \sum_0^\lambda{}^{\nu} \frac{t^\nu \left(1-\frac{x}{s}\right)^\nu}{\nu!}$$

Null wird. Setzt man nämlich

$$D = R_1(m,t) + R_2(m,t),$$

wobei

$$R_1(m,t) = \lim_{t=\infty} \sum_0^m{}^{\lambda} \frac{A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda}{\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\lambda+1}} e^{-t\left(1-\frac{x}{s}\right)} \sum_0^\lambda{}^{\nu} \frac{t^\nu \left(1-\frac{x}{s}\right)^\nu}{\nu!}$$

$$R_2(m,t) = \lim_{t=\infty} \sum_{m+1}^{\infty\lambda} \frac{A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda}{\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\lambda+1}} e^{-t\left(1-\frac{x}{s}\right)} \sum_0^{\lambda\nu} \frac{t^\nu\left(1-\frac{x}{s}\right)^\nu}{\nu!},$$

so wird

$$R_1(m,t) = 0,$$

während

$$|R_2(m,t)|$$

$$= \left| \lim_{t-\infty} e^{-t\left(1-\frac{x}{s}\right)} \sum_0^{\infty\nu} \frac{t^\nu\left(1-\frac{x}{s}\right)^\nu}{\nu!} \sum_{m+\nu+1}^{\infty\lambda} A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda \frac{1}{\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\lambda+1}} \right|$$

$$\leqq \lim_{t=\infty} \left| e^{-t\left(1-\frac{x}{s}\right)} \right| \left\| \sum_0^{\infty\nu} \frac{t^\nu\left(1-\frac{x}{s}\right)^\nu}{\nu!} \right| \left| \sum_{m+\nu+1}^{\infty\lambda} A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda \frac{1}{\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\lambda+1}} \right|.$$

Infolge der Konvergenz der Summe

$$\sum_0^{\infty\lambda} \frac{A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda}{\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\lambda+1}}$$

kann ich M so groß wählen, daß

$$\left| \sum_m^{\infty\lambda} A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda \frac{1}{\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\lambda+1}} \right| < \varepsilon \text{ wird, für jedes } m \geqq M,$$

also konvergiert auch $R_2(m,t)$ gegen Null und es ist, wie behauptet:

6) $$D = 0.$$

Die Gleichung

7) $$f(x) = \lim_{t=\infty} \sum_0^{\infty\lambda} \left\{ \frac{A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda}{\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\lambda+1}} e^{-t\left(1-\frac{x}{s}\right)} \sum_{\lambda+1}^{\infty\nu} \frac{t^\nu\left(1-\frac{x}{s}\right)^\nu}{\nu!} \right\}$$

gilt somit für die Halbebene $\Re\left(1-\frac{x}{s}\right)>0$ unter der Voraussetzung, daß $f(x)$ die einzige singuläre Stelle $x=s$ besitze.

Von diesem Ausdruck kann man aber zu dem Borelschen verallgemeinerten Grenzwert gelangen, ohne dem x weitere Beschränkungen auflegen zu müssen. Setzt man

$$8)\qquad \begin{aligned} s_\nu(x) &= \sum_1^{\nu-1} a_\varkappa x^\varkappa, & \sigma_\nu(x) &= \sum_0^{\nu-1} x^\varkappa \\ s_0(x) &= 0 & \sigma_0(x) &= 0, \end{aligned}$$

dann ist

$$D_x^\lambda \frac{\sigma_{\nu+1}(x)}{\lambda!} = \frac{\sigma_{\nu+1}^{(\lambda)}(x)}{\lambda!} = \sum_0^{\nu-\lambda} \binom{\lambda+\varkappa}{\lambda} x^\varkappa$$

und

$$s_{\nu+1}(x) = \sum_0^\nu a_\varkappa x^\varkappa = \sum_0^\nu \left(\frac{x}{s}\right)^\varkappa \sum_0^\varkappa A_\lambda(s)\binom{\varkappa}{\lambda} = \sum_0^\nu A_\lambda(s) \sum_\lambda^\nu \binom{\varkappa}{\lambda}\left(\frac{x}{s}\right)^\varkappa$$

$$= \sum_0^\nu A_\lambda(s) \sum_0^{\nu-\lambda} \binom{\varkappa+\lambda}{\lambda}\left(\frac{x}{s}\right)^{\varkappa+\lambda} = \sum_0^\nu A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda \frac{\sigma_{\nu+1}^{(\lambda)}\left(\frac{x}{s}\right)}{\lambda!}.$$

Andererseits aber ist

$$9)\qquad \sigma_{\nu+1}(x) = \frac{1-x^{\nu+1}}{1-x}$$

und

$$9\,a)\qquad \frac{\sigma_{\nu+1}^{(\lambda)}(x)}{\lambda!} = \frac{1}{(1-x)^{\lambda+1}} - \sum_0^\lambda \binom{\nu+1}{\lambda-\varkappa} x^{\nu+1+\varkappa-\lambda} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\varkappa+1}},$$

wie sich durch vollständige Induktion ergibt. Für $\lambda=1$ ist direkt

$$\frac{\sigma_{\nu+1}^{(1)}(x)}{1} = \frac{1}{(1-x)^2} - \binom{\nu+1}{1} x^\nu \cdot \frac{1}{1-x}.$$

Angenommen Formel 9 a) gelte für ein bestimmtes $\lambda \geq 1$, so folgt durch Differentiation

$$\frac{\sigma_{\nu+1}^{(\lambda+1)}(x)}{\lambda+1!} = \frac{1}{(1-x)^{\lambda+2}} - \sum_0^{\lambda_\varkappa}\binom{\nu+1}{\lambda-\varkappa}\frac{\nu+1+\varkappa-\lambda}{\lambda+1}x^{\nu+\varkappa-\lambda}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\varkappa+1}}$$

$$-\sum_0^{\lambda_\varkappa}\binom{\nu+1}{\lambda-\varkappa}\frac{\varkappa+1}{\lambda+1}x^{\nu+1+\varkappa-\lambda}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\varkappa+2}}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^{\lambda+2}} - \sum_1^{\lambda_\varkappa}\binom{\nu+1}{\lambda+1-\varkappa}x^{\nu+\varkappa-\lambda}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\varkappa+1}}$$

$$-\binom{\nu+1}{\lambda+1}\frac{x^{\nu-\lambda}}{1-x} - \frac{x^{\nu+1}}{(1-x)^{\lambda+2}}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^{\lambda+2}} - \sum_0^{\lambda+1_\varkappa}\binom{\nu+1}{\lambda+1-\varkappa}x^{\nu+\varkappa-\lambda}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\varkappa+1}},$$

womit die allgemeine Gültigkeit der Formel 9 a) bewiesen ist.

Vermöge dieser Identitäten besteht also die Relation

10)
$$s_{\nu+1}(x) = \sum_0^{\nu_\varkappa} a_\varkappa x^\varkappa =$$

$$\sum_0^{\nu_\lambda} A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda\left[\frac{1}{\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\lambda+1}} - \sum_0^{\lambda_\varkappa}\binom{\nu+1}{\lambda-\varkappa}\left(\frac{x}{s}\right)^{\nu+1+\varkappa-\lambda}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\varkappa+1}}\right].$$

Es wird nun

11)
$$e^{-t\left(1-\frac{x}{s}\right)}\sum_0^{\infty_\lambda} A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda\sum_0^{\infty_\nu}\frac{t^{\nu+\lambda+1}}{\nu+\lambda+1!}\left(1-\frac{x}{s}\right)^\nu$$

$$= e^{-t\left(1-\frac{x}{s}\right)}\sum_0^{\infty_\lambda} A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda\sum_\lambda^{\infty_\nu}\frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!}\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\nu-\lambda}$$

$$= e^{-t\left(1-\frac{x}{s}\right)}\sum_0^{\infty_\nu}\frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!}\sum_0^{\nu_\lambda} A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\nu-\lambda}$$

$$= e^{-t(1-x)}\sum_0^{\infty_\nu}\frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!}B_\nu,$$

wenn

$$B_\nu = \sum_0^{\nu_\lambda} A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\nu-\lambda}$$

gesetzt wird. Die rechte Seite läßt sich noch weiter umformen.

Es ist

$$e^{-t\left(1-\frac{x}{s}\right)}\sum_0^\infty{}_\nu \frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!}B_\nu = e^{-t}\sum_0^\infty{}_\varkappa \frac{t^\varkappa\left(\frac{x}{s}\right)^\varkappa}{\varkappa!}\sum_0^\infty{}_\nu \frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!}B_\nu$$

$$= e^{-t}\sum_0^\infty{}_\varkappa \sum_0^\infty{}_\nu \frac{t^{\nu+\varkappa+1}}{\nu+\varkappa+1!}\binom{\nu+\varkappa+1}{\varkappa}\left(\frac{x}{s}\right)^\varkappa B_\nu \tag{12}$$

$$= e^{-t}\sum_0^\infty{}_\nu \frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!}\sum_0^\nu{}_\varkappa \binom{\nu+1}{\varkappa}\left(\frac{x}{s}\right)^\varkappa B_{\nu-\varkappa}$$

$$= e^{-t}\sum_0^\infty{}_\nu \frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!}C_\nu .$$

Setzt man ferner

$$C_\nu = \sum_0^\nu{}_\varkappa \binom{\nu+1}{\varkappa}\left(\frac{x}{s}\right)^\varkappa B_{\nu-\varkappa},$$

so wird nach Einsetzen des Wertes von $B_{\nu-\varkappa}$

$$C_\nu = \sum_0^\nu{}_\lambda A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda \frac{1}{\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\lambda+1}}\sum_0^{\nu-\lambda}{}_\varkappa \binom{\nu+1}{\varkappa}\left(\frac{x}{s}\right)^\varkappa\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\nu+1-\varkappa}$$

$$= \sum_0^\nu{}_\lambda A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda \frac{1}{\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\lambda+1}}\cdot\left[\sum_0^{\nu+1}{}_\varkappa \binom{\nu+1}{\varkappa}\left(\frac{x}{s}\right)^\varkappa\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\nu+1-\varkappa}\right.$$

$$\left.-\sum_{\nu+1-\lambda}^{\nu+1}\binom{\nu+1}{\varkappa}\left(\frac{x}{s}\right)^\varkappa\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\nu+1-\varkappa}\right]$$

$$= \sum_0^\nu{}_\lambda A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda \frac{1}{\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\lambda+1}}\left[1-\sum_0^\lambda{}_\varkappa \binom{\nu+1}{\lambda-\varkappa}\left(\frac{x}{s}\right)^{\nu+1+\varkappa-\lambda}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\varkappa-\lambda}}\right]$$

also

$$C_\nu = \sum_0^\nu{}_\lambda A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda \frac{\sigma_{\nu+1}^{(\lambda)}\left(\frac{x}{s}\right)}{\lambda!} = s_{\nu+1}(x) = \sum_0^\nu{}_\varkappa a_\varkappa x^\varkappa, \tag{13}$$

wie sich aus den Gleichungen 8) und 9a) ergibt.

Somit erhalten wir aus den Gleichungen 11), 12 und 13) das endgültige Resultat

$$14) \quad f(x) = \lim_{t=\infty} \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{A_\lambda(s)\left(\frac{x}{s}\right)^\lambda}{\left(1-\frac{x}{s}\right)^{\lambda+1}} \cdot e^{-t\left(1-\frac{x}{s}\right)} \cdot \sum_{\lambda+1}^\infty{}^{\nu} \frac{t^\nu \left(1-\frac{x}{s}\right)^\nu}{\nu!}$$

$$= \lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{t^\nu}{\nu!} s_\nu(x), \quad \text{für} \quad \Re\left(1-\frac{x}{s}\right) > 0.$$

Dasselbe läßt sich aber auch sofort auf Funktionen mit einer beliebigen endlichen Anzahl singulärer Stellen

$$a_1, \; a_2, \; \ldots, \; a_p$$

ausdehnen. Ist nämlich

$$a_\varkappa = \varrho_\varkappa + \sigma_\varkappa i,$$

so stellt der Grenzwert

$$\lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{t^\nu}{\nu!} s_\nu(x)$$

die Funktion $f(x)$ im Innern desjenigen Bereiches dar, welcher von den Geraden

$$15) \quad \xi \varrho_\varkappa + \eta \sigma_\varkappa = \varrho_\varkappa^2 + \sigma_\varkappa^2, \qquad (\varkappa = 1, \; 2, \; \ldots, \; p)$$

begrenzt wird, und den Nullpunkt enthält. Dieser Bereich, das sogenannte „Summationspolygon", wird erhalten, indem in den singulären Stellen die Lote auf deren Verbindungsstrahlen mit dem Nullpunkt errichtet werden.

Beweis:

Wie gleichfalls in der oben zitierten Arbeit[1]) bewiesen wird, haben in diesem Falle die Koeffizienten die Form

$$a_\nu = \sum_1^p{}^{\varkappa} \frac{1}{(a_\varkappa)^\nu} g_\varkappa(\nu) + a'_\nu,$$

---

[1]) A. a. O., p. 48, Formel (57 a).

wenn man unter $g_\varkappa(y)$ eine ganze rationale oder eine ganze, höchstens den Minimaltypus erster Ordnung angehörende transzendente Funktion versteht und

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|a_1'|} = 0$$

ist.

Es ist demnach

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_1^p{}^\varkappa \sum_0^\infty{}^\nu \frac{1}{(a_\varkappa)^\nu} g_\varkappa(\nu) \cdot x^\nu + \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu' x^\nu .$$

Für jede der p Summen

$$\sum_0^\infty{}^\nu \frac{1}{(a_\varkappa)^\nu} g_\varkappa(\nu) \cdot x^\nu \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

gilt aber die Darstellung

16) $$\sum_0^\infty{}^\nu \frac{1}{(a_\varkappa)^\nu} g_\varkappa(\nu) \cdot x^\nu = \lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_0^\infty{}^\nu \frac{t^\nu}{\nu!} s_\nu^\varkappa(x),$$

wobei

$$\sigma_\nu^{(\varkappa)}(x) = \sum_0^{\nu-1}{}^\lambda \frac{1}{(a_\varkappa)^\lambda} g_\varkappa^{(\lambda)} \cdot x^\lambda$$

und zwar stellt die rechte Seite die analytische Fortsetzung der linken dar, für alle x, welche der Bedingung

$$\xi \varrho_\varkappa + \eta \sigma_\varkappa < \varrho_\varkappa^s + \sigma_\mu^s$$

genügen.

Ferner ist infolge der Voraussetzung

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu'|} = 0$$

die Reihe

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu' x^\nu$$

eine ganze transzendente Funktion; auch für sie gilt die Darstellung

$$\sum_0^\infty{}^\nu a'_\nu x^\nu \equiv s(x) = \lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_0^\infty{}^\nu \frac{t^\nu}{\nu!} s_\nu(x)$$

17)

$$\left(\text{wobei} \quad s_\nu(x) = \sum_0^{\nu-1}{}^\lambda a'_\lambda x^\lambda\right),$$

denn es ist

$$\sum_0^\infty{}^\nu a'_\nu x^\nu = \lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_0^\infty{}^\nu \frac{t^\nu}{\nu!} \left\{\sum_0^\infty{}^\lambda a'_\lambda x^\lambda - \sum_\nu^\infty{}^\lambda a'_\lambda x^\lambda\right\}$$

$$= \sum_0^\infty{}^\nu a'_\nu x^\nu - \lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_0^\infty{}^\nu \frac{t^\nu}{\nu!} \sum_\nu^\infty{}^\lambda a'_\lambda x^\lambda$$

$$= s(x) - R_1(m,t) - R_2(m,t),$$

wenn

$$R_1(m,t) = \lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_0^m{}^\nu \frac{t^\nu}{\nu!} \sum_\nu^\infty{}^\lambda a'_x x^\lambda$$

$$R_2(m,t) = \lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_{m+1}^\infty{}^\nu \frac{t^\nu}{\nu!} \sum_\nu^\infty{}^\lambda a'_\lambda x^\lambda$$

gesetzt wird. $R_1(m,t)$ ist aber Null, während

$$|R_2(m,t)| \leq \lim_{t=\infty} e^{-t} \left| \sum_1^\infty{}^\nu \frac{t^{m+\nu}}{m+\nu!} \right| \left| \sum_{m+\nu}^\infty{}^\lambda a'_\lambda x^\lambda \right| \Big|.$$

Wegen der beständigen Konvergenz der Reihe

$$\sum_0^\infty{}^\nu a'_\lambda x^\lambda$$

kann ich dann wieder M so groß wählen, daß für alle $m > M$

$$\left| \sum_m^\infty{}^\lambda a'_\lambda x^\lambda \right| < \varepsilon$$

wird.

Also auch

$$|R_2(m,t)| < \varepsilon,$$

und somit gilt die Darstellung

$$\sum_0^\infty{}^\nu a'_\nu x^\nu = \lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_0^\infty{}^\nu \frac{t^\nu}{\nu!} s_\nu(x)$$

für alle Werte x. Durch Addition der Gleichungen 16) zu der Gleichung 17) ergibt sich schließlich

$$18) \qquad f(x) = \lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_{0}^{\infty\nu} \frac{t^\nu}{\nu!} \sum_{0}^{\nu-1\lambda} a_\lambda x^\lambda$$

im Innern des Summationspolygons (vgl. S. 13).

Macht man über das Wachstum von t gewisse Voraussetzungen, so kann man den Borelschen verallgemeinerten Grenzwert auch in Form einer unendlichen Reihe ganzer transzendenter Funktionen darstellen.

Bedeutet nämlich $\varphi(y)$ eine Funktion von y, welche nur den Bedingungen zu genügen braucht,

$$\text{a)} \quad \varphi(0) = 0$$

$$\text{b)} \quad \lim_{y=0} \varphi(y) = +\infty,$$

wenn y reell ins Unendliche wächst, also speziell für ganzzahlige μ

$$\lim_{\mu=\infty} \varphi(\mu) = +\infty.$$

Setzt man ferner

$$19) \qquad F_\mu(x) = e^{-\varphi(\mu)} \sum_{0}^{\infty\nu} \frac{\varphi(\mu)^\nu}{\nu!} s_\nu(x) \quad (F_0(x) = 0),$$

so sind die $F_\mu(x)$ für alle endlichen μ ganze transzendente Funktionen, denn es ist

$$F_\mu(x) = e^{-\varphi(\mu)} \sum_{0}^{\infty\nu} \frac{\varphi(\mu)^\nu}{\nu!} \sum_{0}^{\nu-1\lambda} a_\lambda x^\lambda = \sum_{0}^{\infty\lambda} x^\lambda \left(e^{-\varphi(\mu)} a_\lambda \sum_{\lambda+1}^{\infty\nu} \frac{\varphi(\mu)^\nu}{\nu!} \right).$$

und diese Potenzreihe muß in der ganzen Ebene konvergieren.

Nach Voraussetzung besitzt nämlich die Reihe

$$\sum_{0}^{\infty\nu} a_\nu x^\nu$$

den Konvergenzradius 1.

Es besteht also die Relation

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 1.$$

Da ferner für alle endlichen μ

$$\lim_{\lambda=\infty} \sum_{\lambda+1}^{\infty \nu} \frac{\varphi(\mu)^\nu}{\nu!} = 0,$$

so wird

$$20) \qquad \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{e^{-\varphi(\mu)} |a_\lambda| \sum_{\lambda+1}^{\infty \nu} \frac{\varphi(\mu)^\nu}{\nu!}} = 0$$

und diese Aussage ist gleichbedeutend mit derjenigen, daß $F_\mu(x)$ eine ganze transzendente Funktion darstellt.

Vermöge der Transformation $t = \varphi_\mu(x)$ geht aber die rechte Seite von Gleichung 14) über in

$$\lim_{\mu=\infty} F_\mu(x) = \sum_{0}^{\infty \nu} (F_{\mu+1}(x) - F_\mu(x)).$$

Also bestehen schließlich unter der Voraussetzung, daß $f(x)$ nur eine endliche Anzahl singulärer Stellen besitzt, im Innern des Summationspolygons die Darstellungen:

$$21) \qquad \begin{aligned} f(x) &= \lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_{0}^{\infty \nu} \frac{t^\nu}{\nu!} s_\nu(x) = \lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_{0}^{\infty \nu} a_\lambda x^\lambda \sum_{\lambda+1}^{\infty \nu} \frac{t^\lambda}{\lambda!} \\ &= \sum_{0}^{\infty \nu} (F_{\mu+1}(x) - F_\mu(x)). \end{aligned}$$

Zu weiteren Schlüssen berechtigt dieses Verfahren nicht. Insbesondere ist es nicht imstande, zu zeigen, daß der verallgemeinerte Grenzwert auch dann noch, wenn über die Singularitäten der Funktion $f(x)$ keinerlei Voraussetzungen gemacht werden, eine Darstellung derselben im Innern des Summationspolygons liefert. Diese Behauptung soll späterhin mit Hilfe des in der Einleitung erwähnten elementaren Ersatzmittels für das Cauchysche Randintegral bewiesen werden, welches den Gegenstand der folgenden Betrachtung bilden soll.

§ 2.

Ist $\varphi(\zeta)$ eine im Intervall $\zeta_1 \zeta_2$ stetige Funktion der reellen oder rein imaginären veränderlichen ζ, so definiere ich als Mittelwert von $\varphi(\zeta)$ über das Intervall $\zeta_1 \zeta_2$ in Zeichen

$$\underset{\zeta_1}{\overset{\zeta_2}{M}} \varphi(\zeta)$$

den folgenden Grenzwert

$$1) \qquad \underset{\zeta_1}{\overset{\zeta_2}{M}} \varphi(\zeta) = \lim_{N=\infty} \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{N} \sum_0^{N-1\nu} \varphi\left(\zeta_1 + \frac{\nu}{N}(\zeta_2 - \zeta_1)\right),$$

(wobei $N = 2^n$), dessen Existenz leicht nachgewiesen werden kann.

Da nach Voraussetzung $\varphi(\zeta)$ für $\zeta_1 \leqq \zeta < \zeta_2$ stetig sein soll, so läßt sich nach Vorgabe einer beliebig kleinen Zahl ε ein ganzzahliges n so groß bestimmen, dass für alle $\nu = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ die Relation besteht:

$$2) \qquad \left| \varphi(\zeta_1 + \frac{\nu+1}{2^n}(\zeta_2 - \zeta_1) - \varphi\left(\zeta_1 + \frac{\nu}{2^n}(\zeta_2 - \zeta_1)\right) \right| < \varepsilon.$$

Nach Definition 1) ist aber für alle $p \geqq 1$:

$$\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2^{n+p}} \sum_0^{2^{n+p}-1\nu} \varphi\left(\zeta_1 + \frac{\nu}{2^{n+p}}(\zeta_2 - \zeta_1)\right)$$

$$\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2^{n+p}} \sum_0^{2^n-1\nu} \sum_0^{2^p-1\mu} \varphi\left(\zeta_1 + \left(\frac{\nu + \frac{\mu}{2^p}}{2^n}\right)(\zeta_2 - \zeta_1)\right),$$

während

$$\frac{\zeta_1 - \zeta_1}{2^n} \sum_0^{2^n-1\nu} \varphi\left(\zeta_1 + \frac{\nu}{2^n}(\zeta_2 - \zeta_1)\right)$$

in die Form

$$\frac{\zeta_2-\zeta_1}{2^{n+p}}\sum_0^{2^n-1}{}^{\nu}\sum_0^{2^p-1}{}^{\mu}\varphi\left(\zeta_1+\frac{\nu}{2^n}(\zeta_2-\zeta_1)\right)$$

gesetzt werden kann. Durch Subtraktion dieser beiden Summen findet man

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{\zeta_2-\zeta_1}{2^{n+p}}\sum_0^{2^{n+p}-1}{}^{\nu}\varphi\left(\zeta_1+\frac{\nu}{2^{n+p}}(\zeta_2-\zeta_1)\right)\\
&\quad-\frac{\zeta_2-\zeta_1}{2^n}\sum_0^{2^n-1}{}^{\nu}\varphi\left(\zeta_1+\frac{\nu}{2^n}(\zeta_2-\zeta_1)\right)\Bigg|\\
3)\qquad&=\Bigg|\frac{\zeta_2-\zeta_1}{2^{n+p}}\sum_0^{2^n-1}{}^{\nu}\sum_0^{2^n-1}{}^{\mu}\varphi\left(\zeta_1+\left(\frac{\nu+\frac{\mu}{2^p}}{2^n}\right)(\zeta_2-\zeta_1)\right)\\
&\quad-\varphi\left(\zeta_1+\frac{\nu}{2^n}(\zeta_2-\zeta_1)\right)\Bigg|\\
&\leqq\left|\frac{\zeta_2-\zeta_1}{2^{n+p}}\right|\sum_0^{2^n-1}{}^{\nu}\sum_0^{2^p-1}{}^{\mu}\cdot\varepsilon\\
&=|\zeta_2-\zeta_1|\cdot\varepsilon,
\end{aligned}$$

da wegen $\frac{\mu}{2^p}<1$ die Voraussetzung 2) sicher erfüllt ist.

Es konvergiert also mit wachsendem n die Differenz 3) gegen Null, womit die Existenz des fraglichen Grenzwertes nachgewiesen ist.

Aus der Definition folgt, daß

$$4)\qquad \overset{\zeta_1}{\underset{\zeta_2}{M}}\varphi(\zeta)=-\overset{\zeta_2}{\underset{\zeta_1}{M}}\varphi(\zeta)$$

und

$$5)\qquad \overset{\zeta_2}{\underset{\zeta_1}{M}}c\cdot\varphi(\zeta)=c\overset{\zeta_2}{\underset{\zeta_1}{M}}\varphi(\zeta),$$

wenn c konstant ist.

Sei ferner $\varphi_\nu(\zeta)$ eine im Intervalle $\zeta_1 \zeta_2$ stetige Funktion der reellen oder rein imaginären Veränderlichen ζ und sei

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} \varphi_\nu(\zeta)$$

in demselben Intervalle gleichmäßig konvergent, so läßt sich leicht die Gültigkeit der Relation beweisen:

$$6) \qquad \underset{\zeta_1}{\overset{\zeta_2}{M}} \sum_0^\infty{}^{\nu} \varphi_\nu(\zeta) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \underset{\zeta_1}{\overset{\zeta_2}{M}} \varphi_\nu(\zeta).$$

Eine weitere Eigenschaft dieses Mittelwertes

$$\underset{\zeta_1}{\overset{\zeta_2}{M}} \varphi(\zeta),$$

die später noch gebraucht wird, ist folgende:

Die Funktion $\varphi(\zeta, p)$ der reellen oder rein imaginären veränderlichen ζ und des Parameters p sei im Intervall $\zeta_1 \zeta_2$ stetig und nach p gleichmäßig differenzierbar. Dann wird behauptet:

$$7) \qquad \frac{\partial}{\partial p} \underset{\zeta_1}{\overset{\zeta_2}{M}} \varphi(\zeta, p) = \underset{\zeta_1}{\overset{\zeta_2}{M}} \frac{\partial}{\partial p} \varphi(\zeta, p).$$

Auf Grund der Voraussetzung läßt sich nämlich, wenn h beliebig klein vorgeschrieben wird, für alle ζ des Intervalles eine mit h gegen Null konvergierende Zahl ε_h angeben, derart, daß

$$\left| \frac{\varphi(\zeta, p+h) - \varphi(\zeta, p)}{h} - \frac{\partial}{\partial p} \varphi(\zeta, p) \right| < \varepsilon_h$$

wird.

Es ist aber

$$\frac{\partial}{\partial p} \underset{\zeta_1}{\overset{\zeta_2}{M}} \varphi(\zeta, p)$$

$$= \lim_{h=0} \lim_{N=\infty} \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{N} \sum_0^{N-1}{}^{\nu} \frac{\varphi\left(\zeta_1 + \frac{\nu}{N}(\zeta_2 - \zeta_1),\ p+h\right) - \varphi\left(\zeta_1 + \frac{\nu}{N}\zeta_2 - \zeta_1,\ p\right)}{h},$$

also wird die Differenz

$$\left| \frac{\partial}{\partial p} \overset{\zeta_2}{\underset{\zeta_1}{M}} \varphi(\zeta_1 p) - \overset{\zeta_2}{\underset{\zeta_1}{M}} \frac{\partial}{\partial p} \varphi(\zeta_1 p) \right|$$

$$= \left| \lim_{h=0} \lim_{N=\infty} \frac{\zeta_2-\zeta_1}{N} \sum_0^{N-1}{}^{\nu} \frac{\varphi\left(\zeta_1+\frac{\nu}{N}(\zeta_2-\zeta_1),\ p+h\right)-\varphi\left(\zeta_1+\frac{\nu}{N}(\zeta_2-\zeta_1),\ p\right)}{h} \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial p} \varphi\left(\zeta_1 + \frac{\nu}{N}(\zeta_2 - \zeta_1),\ p\right) \right|$$

$$< \lim_{h=0} |\zeta_2 - \zeta_1| \cdot \varepsilon_h$$

$$= 0.$$

Es bedeutet nun $f(x)$ eine stetige Funktion der komplexen Veränderlichen

$$x = r e^{\vartheta i}.$$

Setzt man dann der bequemeren Schreibweise halber

8) $$f(x) \equiv f(r e^{\vartheta i}) = f(r,\ \vartheta),$$

so kann die Mittelwertbildung, sowohl auf die reelle Veränderliche r als auch auf die rein imaginäre ϑi erstreckt werden, und es ergeben sich als Spezialfälle von 1):

1. Der Mittelwert über das Vektorstück $\overline{r_1 r_2}$ mit dem Polarwinkel ϑ_1, d. h. über die Verbindungsstrecke der beiden Punkte $x_1 = r_1 e^{\vartheta_1 i}$ und $x_2 = r_2 e^{\vartheta_1 i}$, nämlich

9) $$\overset{r_2}{\underset{r_1}{M}} f(r,\ \vartheta_1)$$

$$\equiv \overset{r_2}{\underset{r_1}{M}} f(x)_{\vartheta_1} = \lim_{N=\infty} \frac{r_2 - r_1}{N} \sum_0^{N-1}{}^{\nu} f\left(r_1 + \frac{\nu}{N}(r_2 - r_1),\ \vartheta_1\right).$$

2. Der Mittelwert über den Kreisbogen mit dem Radius r_1, welcher die Punkte $x_1 = r_1 e^{\vartheta_1 i}$ und $x_2 = r_1 e^{\vartheta_2 i}$ verbindet, nämlich

10) $$\underset{\vartheta_1 i}{\overset{\vartheta_2 i}{M}} f(r_1, \vartheta)$$

$$\underset{\vartheta_1 i}{\overset{\vartheta_2 i}{M}} f(x)_{r_1} = \lim_{N=\infty} \frac{(\vartheta_2 - \vartheta_1)\, i}{N} \sum_0^{N-1 \nu} f\left(r_1,\ \vartheta_1 + \frac{\nu}{N}(\vartheta_2 - \vartheta_1)\right).$$

Setzt man hierin $\vartheta_2 = \vartheta_1 + 2\pi$, so ergibt sich der Mittelwert über die Kreisperipherie

10a) $$\underset{\vartheta_1 i}{\overset{(\vartheta_1 + 2\pi) i}{M}} f(x)_{r_1} = \lim_{N=\infty} \frac{2\pi i}{N} \sum_0^{N-1 \nu} f\left(r_1,\ \vartheta_1 + \frac{2\nu\pi i}{N}\right).$$

Anmerkung:

Für $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = 2\pi$ geht dieser Ausdruck über in den folgenden:

$$\underset{0}{\overset{2\pi i}{M}} f(x)_{r_1} = 2\pi i \lim_{N=\infty} \frac{1}{N} \sum_0^{N-1 \nu} f\left(r_1 e^{\frac{2\nu\pi i}{N}}\right) = 2\pi i\, \mathfrak{M} f(r_1)$$

in der Pringsheimschen Bezeichnung [1]).

Hinsichtlich des Mittelwertes 10a) über die Kreisperipherie gelten die folgenden Sätze, die sich mit bloßer Abänderung der Bezeichnung aus der Pringsheimschen Arbeit [2]) entnehmen lassen, doch soll der Vollständigkeit halber der Beweis hier kurz wiederholt werden.

Ist μ eine positive ganze Zahl, so ist

11) $$\left.\begin{array}{ll} \underset{\vartheta_1 i}{\overset{(\vartheta_1 + 2\pi) i}{M}} (x^{\pm\mu})_r & \\ = 2\pi i & \text{für } \mu = 0 \\ = 0 & \text{für } \mu \gtrless 0. \end{array}\right.$$

Aus der Definition 10a) folgt direkt

$$\underset{\vartheta_1 i}{\overset{(\vartheta_1 + 2\pi) i}{M}} (1) = 2\pi i.$$

---

[1]) Math. Annalen 47, 1896, p. 132/4, Gleichung (1) und (8).

[2]) A. a. O., p. 135.

Für $\mu \gtrless 1$ wird dagegen

$$\begin{aligned}
\underset{\vartheta_1 i}{\overset{(\vartheta_1+2\pi)i}{M}} (x^{\pm\mu})_r &= \lim_{N=\infty} \frac{2\pi i}{N} \sum_0^{N-1\nu} \left(r e^{\left(\vartheta_1 + \frac{2\nu\pi}{N}\right)i} \right)^{\pm\mu} \\
&= \lim_{N=\infty} \frac{2\pi i}{N} (r e^{\vartheta_1 i})^{\pm\mu} \sum_0^{N-1\nu} \left(e^{\frac{+2\mu\pi i}{N}} \right)^{\nu} \\
&= \lim_{N=\infty} \frac{2\pi i}{N} (r e^{\vartheta_1 i})^{\pm\mu} \frac{e^{\pm 2\mu\pi i} - 1}{e^{\frac{\pm 2\mu\pi i}{N}} - 1} = 0.
\end{aligned}$$

Es bedeute jetzt C eine gebrochene Linie, welche zusammengesetzt ist aus

den m Vektorstücken

$$\overline{r_1 r_2}, \quad \overline{r_2 r_3}, \quad \ldots, \quad \overline{r_m r_{m+1}}$$

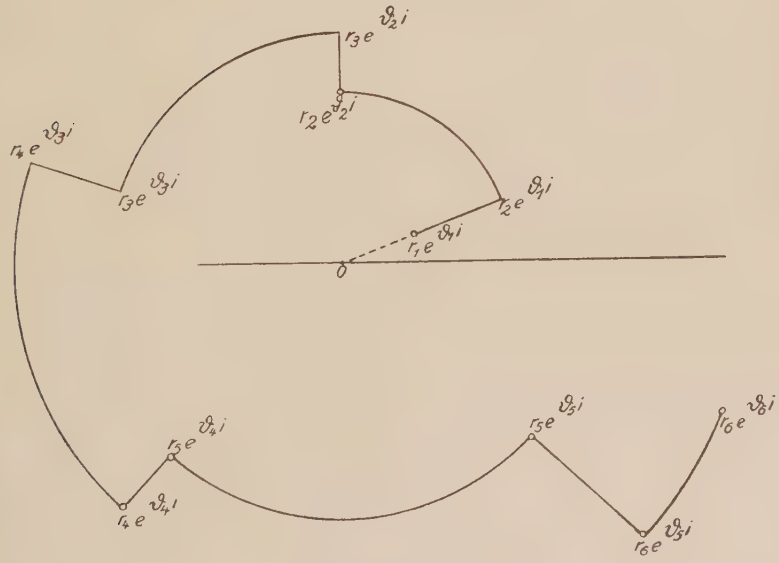

Fig. 1.

mit den Polarwinkeln

$$\vartheta_1, \quad \vartheta_2, \quad \ldots, \quad \vartheta_m$$

und den $m-1$ verbindenden Kreisbögen mit den Radien

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_{m-1},$$

zu denen eventuell noch ein Anfangsbogen mit dem Radius r_1 und dem Anfangswinkel ϑ_0 bzw. ein Endbogen mit dem Radius r_{m+1} und dem Endwinkel ϑ_{m+1} hinzutreten könnte (Fig. 1). Dann soll als „gemischter Mittelwert von $\frac{x}{r} f(x)$ und $x \cdot f(x)$ über den Weg C" definiert und in Zukunft schlechthin als „Mittelwert von $f(x)$ über den Weg C" bezeichnet werden: die Summe der Mittelwerte von $\frac{x}{r} f(x) = e^{\vartheta i} f(x)$ über die Vektoren und von $x \cdot f(x)$ über die Kreisbögen. In Zeichen

$$12) \quad \underset{(C)}{M} f(x) = \sum_1^m{}^{\mu} \underset{r_\mu}{\overset{r_{\mu+1}}{M}} e^{\vartheta_\mu i} f(r, \vartheta_\mu) + \sum_1^{m-1}{}^{\mu} \underset{\vartheta_\mu i}{\overset{\vartheta_{\mu+1} i}{M}} r_{\mu+1} e^{\vartheta i} f(r_{\mu+1}, \vartheta)$$

oder kürzer

$$12\,a) \quad \underset{(C)}{M} f(x) = \sum_1^m{}^{\mu} \underset{r_\mu}{\overset{r_{\mu+1}}{M}} \left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_\mu} + \sum_1^{m-1}{}^{\mu} \underset{\vartheta_\mu i}{\overset{\vartheta_{\mu+1} i}{M}} (x \cdot f(x))_{r_{\mu+1}}.$$

Dabei ist zu bemerken, daß diese Definition keineswegs an die Voraussetzung

$$r_\mu < r_{\mu+1}, \qquad \vartheta_\mu < \vartheta_{\mu+1}$$

geknüpft ist (vgl. hierzu Gleichung 2).

Als besonderer Fall ergibt sich der Mittelwert über den Kreisringsektor R, welcher begrenzt wird von den Vektorstücken $r_1 r_2$ mit den Polarwinkeln ϑ_1, ϑ_2 und den verbindenden Kreisbögen, in der Folge kurz mit $R(r_1, r_2, \vartheta_1, \vartheta_2)$ bezeichnet:

$$13\,a)\quad \underset{(R)}{Mf(x)} = \overset{r_2}{\underset{r_1}{M}} e^{\vartheta_1 i} f(r,\ \vartheta_1) + \overset{\vartheta_2 i}{\underset{\vartheta_1 i}{M}} r_2 e^{\vartheta i} f(r_2,\ \vartheta)$$

$$+ \overset{r_1}{\underset{r_2}{M}} e^{\vartheta_2 i} f(r,\ \vartheta_2) + \overset{\vartheta_1 i}{\underset{\vartheta_2 i}{M}} r_1 e^{\vartheta i} f(r,\ \vartheta)$$

$$= \overset{r_2}{\underset{r_1}{M}} [e^{\vartheta_1 i} f(r,\ \vartheta_1) - e^{\vartheta_2 i} f(r,\ \vartheta_2)]$$

$$+ \overset{\vartheta_2 i}{\underset{\vartheta_1 i}{M}} [r_2 e^{\vartheta i} f(r_2,\ \vartheta) - r_1 e^{\vartheta i} f(r_1,\ \vartheta)]$$

$$13\,b)\quad \underset{(R)}{Mf(x)} = \overset{r_2}{\underset{r_1}{M}} \left[\left(\frac{x}{r} f(x) \right)_{\vartheta_1} - \left(\frac{x}{r} f(x) \right)_{\vartheta_2} \right]$$

$$+ \overset{\vartheta_2 i}{\underset{\vartheta_1 i}{M}} [(x \cdot f(x))_{r_2} - (x \cdot f(x))_{r_1}]$$

und analog für den Kreissektor S, welcher begrenzt wird von den Vektoren $\overline{0\,r_1}$ mit den Polarwinkeln ϑ_1 und ϑ_2 und den verbindenden Kreisbogen kurz mit $S(r_1,\ \vartheta_1 \vartheta_2)$ bezeichnet:

$$14\,a)\quad \underset{(S)}{Mf(x)} = \overset{r_1}{\underset{0}{M}} e^{\vartheta_1 i} f(r, \vartheta_1) + \overset{\vartheta_2 i}{\underset{\vartheta_1 i}{M}} r_1 e^{\vartheta i} f(r_1, \vartheta) + \overset{r_1}{\underset{0}{M}} e^{\vartheta_2 i} f(r, \vartheta_2)$$

$$= \overset{r_1}{\underset{0}{M}} [e^{\vartheta_1 i} f(r, \vartheta_1) - e^{\vartheta_2 i} f(r, \vartheta_2)] + \overset{\vartheta_2 i}{\underset{\vartheta_1 i}{M}} r_1 e^{\vartheta i} f(r_1, \vartheta)$$

$$14\,b)\quad \underset{(S)}{Mf(x)} = \overset{r_1}{\underset{0}{M}} \left[\left(\frac{x}{r} f(x) \right)_{\vartheta_1} - \left(\frac{x}{r} f(x) \right)_{\vartheta_2} \right] + \overset{\vartheta_2 i}{\underset{\vartheta_1 i}{M}} (x \cdot f(x))_{r_1}.$$

Voraussetzung: (A).

Es sei $f(x)$ im Innern und auf der Begrenzung des Ringsektors R gleichmäßig differenzierbar. (Dasselbe gilt dann auch für $x \cdot f(x)$.) Analytisch ausgedrückt: Es bestehe bei beliebig klein vorgeschriebenem ε für alle x im Innern und auf der Begrenzung des Ringsektors $R \equiv R(r_1,\ r_2,\ \vartheta_1,\ \vartheta_2)$ die Beziehung

$$15)\quad \left|\frac{(x+h)f(x+h)-x\cdot f(x)}{h}-\frac{(x+\varkappa)f(x+\varkappa)-x\cdot f(x)}{\varkappa}\right|<\varepsilon,$$

falls $|h|$ und $|\varkappa|$ hinreichend klein genommen werden, also für

$$16)\quad \left.\begin{matrix}|h|\\|\varkappa|\end{matrix}\right\}\leqq\eta.$$

Dann wird behauptet:

$$17)\quad \underset{(R)}{Mf(x)}=0.$$

Beweis:

Man setzt:

$$18)\quad \begin{cases}h=(r_1+\nu\cdot\varrho)\,e^{(\vartheta_1+\delta)i}-(r_1+\nu\cdot\varrho)\,e^{\vartheta_1 i}=(r_1+\nu\varrho)\,e^{\vartheta_1 i}(e^{\delta i}-1)\\ \varkappa=(r_1+(\nu+1)\varrho)\,e^{\vartheta_1 i}-(r_1+\nu\varrho)\,e^{\vartheta_1 i}=\varrho\,e^{\vartheta_1 i},\end{cases}$$

wobei unter ϱ und δ bzw. die Werte

$$19)\quad \begin{aligned}\varrho&=\frac{r_2-r_1}{N}=\frac{r_2-r_1}{2^n}\\ \delta&=\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{N_1}=\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2^{n_1}}\end{aligned}$$

verstanden werden sollen.

Durch hinreichende Vergrößerung von N und N_1 kann man immer erzielen, daß die beiden so definierten Werte h und $\varkappa$ der Ungleichung 15) genügen. Durch Einsetzen in dieselbe ergibt sich, wenn man von der Schreibweise 8) Gebrauch macht:

$$\left|\frac{(r_1+\nu\varrho)\,e^{(\vartheta_1+\delta)i}f(r_1+\nu\varrho,\ \vartheta_1+\delta)-(r_1+\nu\varrho)\,e^{\vartheta_1 i}f(r_1+\nu\varrho,\ \vartheta_1)}{(r_1+\nu\varrho)\,e^{\vartheta_1 i}(e^{\delta i}-1)}\right.$$
$$\left.-\frac{(r_1+(\nu+1)\varrho)\,e^{\vartheta_1 i}f(r_1+(\nu+1)\varrho,\vartheta_1)-(r_1+\nu\varrho)e^{\vartheta_1 i}f(r_1+\nu\varrho,\vartheta_1)}{\varrho\,e^{\vartheta_1 i}}\right|<\varepsilon$$

$$\begin{aligned}&|\,\varrho\,e^{(\vartheta_1+\delta)i}f(r_1+\nu\varrho,\ \vartheta_1+\delta)-\varrho\,e^{\vartheta_1 i}f(r_1+\nu\varrho,\ \vartheta_1)\\ &-(e^{\delta i}-1)\{(r_1+(\nu+1)\varrho)\,e^{\vartheta_1 i}f(r_1+(\nu+1)\varrho,\ \vartheta_1)\\ &-(r_1+\nu\varrho)\,e^{\vartheta_1 i}f(r_1+\nu\varrho,\ \vartheta_1)\}\,|\\ &<\varepsilon\cdot|\,\varrho\,|\cdot|\,e^{\delta i}-1\,|.\end{aligned}$$

Summiert man über ν von 0 bis $N-1$, so folgt nach Gleichung 19)

$$\left| \varrho\, e^{(\vartheta_1+\delta)i} \sum_0^{N-1} f(r_1+\nu\varrho,\ \vartheta_1+\delta) - \varrho\, e^{\vartheta_1 i} \sum_0^{N-1} f(r_1+\nu\varrho,\ \vartheta_1) \right.$$
$$\left. - (e^{\delta i}-1)\{r_2 e^{\vartheta_1 i} f(r_2,\ \vartheta_1) - r_1 e^{\vartheta_1 i} f(r_1,\ \vartheta_1)\} \right|$$
$$< \varepsilon\, |\, r_2 - r_1\, |\, |\, e^{\delta i}-1\, |.$$

Läßt man nun N ins Unendliche wachsen, so folgt nach Definition 9) und Gleichung 19)

$$\left| \underset{r_1}{\overset{r_2}{M}} \frac{x}{r} f(x)_{\vartheta_1+\delta} - \underset{r_1}{\overset{r_2}{M}} \left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_1} \right.$$
$$\left. - (e^{\delta i}-1)\{r_2 e^{\vartheta_1 i} f(r_2,\ \vartheta_1) - r_1 e^{\vartheta_1 i} f(r_1,\ \vartheta_1)\} \right|$$
$$< \varepsilon\, |\, r_2 - r_1\, |\, |\, e^{\delta i}-1\, |.$$

Ersetzt man in dieser Ungleichung ϑ_1 durch $\vartheta_1 + \mu\delta$, so lautet dieselbe nach Multiplikation mit $e^{\mu\delta i}$:

$$\left| \underset{r_1}{\overset{r_2}{M}} \left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_1+(\mu+1)\delta} - \underset{r_1}{\overset{r_2}{M}} \left(\left(\frac{x}{r}\right) f(x)\right)_{\vartheta_1+\mu\delta} \right.$$
$$\left. - (e^{\delta i}-1)\{r_2\, e^{(\vartheta_1+\mu\delta)i} f(r_2,\ \vartheta_1+\mu\delta) - r_1\, e^{(\vartheta_1+\mu\delta)i} f(r_1,\ \vartheta_1+\mu\delta)\} \right|$$
$$< \varepsilon\, |\, r_2 - r_1\, |\, |\, e^{\delta i}-1\, |.$$

Setzt man hierin μ successive gleich

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N_1-1,$$

so folgt nach Addition aller resultierenden Gleichungen mit Bezugnahme auf 19)

$$\left| \underset{r_1}{\overset{r_2}{M}} \left(\frac{x}{r} \cdot f(x)\right)_{\vartheta_2} - \underset{r_1}{\overset{r_2}{M}} \left(\frac{x}{r} \cdot f(x)\right)_{\vartheta_1} \right.$$
$$- (e^{\delta i}-1) \cdot \frac{N_1}{N_1} \left\{ \sum_0^{N_1-1} r_2\, e^{(\vartheta_1+\mu\delta)i} f(r_2,\ \vartheta_1+\mu\delta) \right.$$
$$\left. \left. - \sum_0^{N_1-1} r_1\, e^{(\vartheta_1+\mu\delta)i} f(r_1,\ \vartheta_1+\mu\delta) \right\} \right| < \varepsilon \cdot |\, r_2 - r_1\, | \cdot |\, e^{\delta i}-1\, | \cdot N_1.$$

Berücksichtigt man noch, daß wegen Gleichung 19)

$$e^{\delta i} - 1 = e^{\frac{(\vartheta_2 - \vartheta_1) i}{N_1}} - 1,$$

also

$$\lim_{N_1 = \infty} N_1 \cdot (e^{\delta i} - 1) = (\vartheta_2 - \vartheta_1) i$$

wird, so folgt, wenn man nunmehr in der letzten Ungleichung N_1 ins Unendliche wachsen läßt, nach Definition 10)

$$\left| \underset{r_1}{\overset{r_2}{M}} \left(\frac{x}{r} \cdot f(x) \right)_{\vartheta_2} - \underset{r_1}{\overset{r_2}{M}} \left(\frac{x}{r} f(x) \right)_{\vartheta_1} - \underset{\vartheta_1 i}{\overset{\vartheta_2 i}{M}} (x \cdot f(x))_{r_2} + \underset{\vartheta_1 i}{\overset{\vartheta_2 i}{M}} (x \cdot f(x))_{r_1} \right.$$
$$\left. < \varepsilon \cdot |r_2 - r_1| \, |\vartheta_2 - \vartheta_1| . \right.$$

Die linke Seite ist bestimmt, die rechte kann beliebig verkleinert werden, also folgt geradezu wie behauptet:

$$20) \qquad \underset{(R)}{M} f(x) - \underset{r_1}{\overset{r_2}{M}} \left[\left(\frac{x}{r} f(x) \right)_{\vartheta_1} - \left(\frac{x}{r} f(x) \right)_{\vartheta_2} \right]$$
$$+ \underset{\vartheta_1 i}{\overset{\vartheta_2 i}{M}} [(x \cdot f(x))_{r_2} - (x \cdot f(x))_{r_1}] = 0.$$

Gilt die Voraussetzung (A) auch für das Innere und die Begrenzung des Sektors $S = S(r_2, \vartheta_1, \vartheta_2)$, so darf in Gleichung 20) $r_1 = 0$ gesetzt werden und man erhält, da nach Definition 10)

$$21) \qquad \underset{\vartheta_1 i}{\overset{\vartheta_2 i}{M}} r e^{\vartheta i} f(r, \vartheta) = 0 \quad \text{für} \quad r = 0,$$

$$\underset{(S)}{M} f(x) = \underset{0}{\overset{r_2}{M}} \left[\left(\frac{x}{r} f(x) \right)_{\vartheta_1} - \left(\frac{x}{r} f(x) \right)_{\vartheta_2} \right] + \underset{\vartheta_1 i}{\overset{\vartheta_2 i}{M}} (x \cdot f(x))_{r_2} = 0.$$

Erstreckt sich die Gültigkeit der Voraussetzung (A) auf das Innere und die Begrenzung eines Kreises K mit dem Radius r, wird also

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= 0 \\ \vartheta_2 &= 2\pi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} r_1 &= 0 \\ r_2 &= r, \end{aligned}$$

so ergibt sich durch Einsetzung dieser Werte in 20)

$$22) \qquad \underset{(K)}{M} f(x) = \overset{2\pi i}{\underset{0}{M}} (x \cdot f(x))_r = 0,$$

da nach Gleichung 8)

$$f(r, \vartheta + 2\varkappa\pi) = f(r, \vartheta) \quad \text{für} \quad \varkappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\lambda \ldots$$

Die Gleichung 20) setzt uns instand, gewisse, für die Mittelwerte

$$\underset{r_1}{\overset{r_2}{M}} \left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_1} \quad \text{und} \quad \overset{\vartheta_2 i}{\underset{\vartheta_1 i}{M}} (x \cdot f(x))_{r_1}$$

gültige Additionsformeln zu beweisen.

Die Voraussetzung (A) sei im Innern und auf der Begrenzung des Kreisringsektors $R(r_1, r_2, \vartheta_1, \vartheta_2)$ erfüllt. Sei dann r' ein Zwischenwert von r_1 und r_2, also

$$r_1 \leqq r' \leqq r_2,$$

so mögen mit R_1 und R_2 bzw. die Ringsektoren

$$R(r_1, r', \vartheta_1, \vartheta_2) \quad \text{und} \quad R(r', r_2, \vartheta_1, \vartheta_2)$$

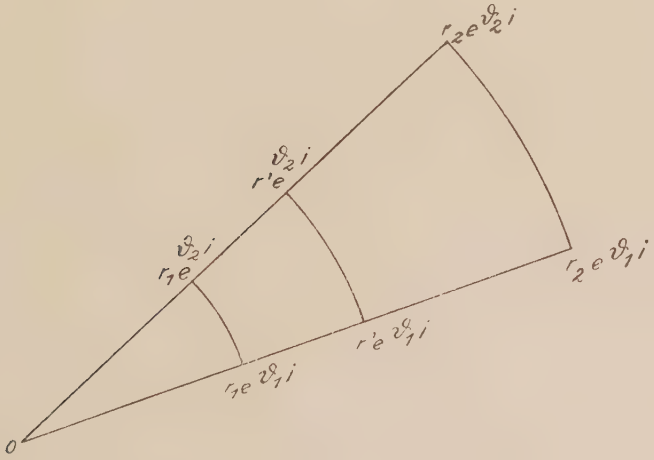

Fig. 2.

bezeichnet werden (siehe Fig. 2). Dann ist

$$\underset{(R)}{M} f(x) = \underset{(R_1)}{M} f(x) = \underset{(R_2)}{M} f(x) = 0$$

oder anders geschrieben

$$\underset{(R)}{M} f(x) = \underset{(R_1)}{M} f(x) + \underset{(R_2)}{M} f(x) = 0.$$

Durch Einsetzen der Werte 13a) findet man, da sich die Mittelwerte über die Kreisbögen herausheben:

$$\underset{r_1}{\overset{r_2}{M}}\left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_1} - \underset{r_1}{\overset{r_2}{M}}\left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_2} = \underset{r_1}{\overset{r'}{M}}\left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_1} - \underset{r_1}{\overset{r'}{M}}\left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_2}$$
$$+ \underset{r'}{\overset{r_2}{M}}\left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_1} - \underset{r'}{\overset{r_2}{M}}\left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_2}.$$

Also

23)
$$\underset{r_1}{\overset{r_2}{M}}\left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_1} - \underset{r_1}{\overset{r'}{M}}\left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_1} - \underset{r'}{\overset{r_2}{M}}\left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_1}$$
$$= \underset{r_1}{\overset{r_2}{M}}\left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_2} - \underset{r_1}{\overset{r'}{M}}\left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_2} - \underset{r'}{\overset{r_2}{M}}\left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_2}.$$

Setzt man

$$\underset{r_1}{\overset{r_2}{M}}\left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta} - \underset{r_1}{\overset{r'}{M}}\left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta} - \underset{r'}{\overset{r_2}{M}}\left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta} \equiv \varphi(r, \vartheta),$$

so besagt die Gleichung 23)

$$\varphi(r, \vartheta_1) = \varphi(r, \vartheta_2),$$

daß $\varphi(r, \vartheta)$ von ϑ unabhängig, also

24)
$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \varphi(r, \vartheta) = 0$$

sein muß.

Nach Formel 7) dürfen bei der partiellen Differentiation nach dem Parameter ϑ die Operationen der Differentiation und der Mittelwertbildung miteinander vertauscht werden, also ergibt sich aus Definition 9) und Formel 7):

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\underset{r_1}{\overset{r_2}{M}}\left(\frac{x}{r}f(x)\right)_\vartheta = \lim_{N=\infty}\frac{\partial}{\partial\vartheta}e^{\vartheta i}\frac{r_2-r_1}{N}\sum_0^{N-1\,\nu} f\left(\left(r_1+\frac{\nu}{N}(r_2-r_1)\right)\cdot e^{\vartheta i}\right)$$

$$= i\underset{r_1}{\overset{r_2}{M}}\left(\frac{x}{r}f(x)\right)_\vartheta$$

$$+ i\lim_{N=\infty}e^{\vartheta i}\frac{r_2-r_1}{N}\sum_0^{N-1\,\nu} f'\left(r_1+\frac{\nu}{N}(r_2-r_1)e^{\vartheta i}\right)\cdot\left(\left(r_1+\frac{\nu}{N}(r_2-r_1)\right)e^{\vartheta i}\right)$$

$$= i\underset{r_1}{\overset{r_2}{M}}\left(\frac{x}{r}f(x)\right)_\vartheta + i\underset{r_1}{\overset{r_2}{M}}\frac{x}{r}\cdot(x\cdot f'(x))_\vartheta$$

$$= i\underset{r_1}{\overset{r_2}{M}}\left(\frac{x}{r}\cdot\frac{d}{dx}(x\cdot f(x))_\vartheta\right).$$

Es wird also

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\varphi(r,\vartheta) = \underset{r_1}{\overset{r_2}{M}}\left(\frac{x}{r}\frac{d}{dx}x\cdot f(x)_\vartheta\right) - \underset{r_1}{\overset{r'}{M}}\left(\frac{x}{r}\frac{d}{dx}x\cdot f(x)\right)_\vartheta$$

$$-\underset{r'}{\overset{r_2}{M}}\left(\frac{x}{r}\frac{d}{dx}x\cdot f(x)\right)_\vartheta = 0.$$

Gilt aber die Voraussetzung (A) im Innern und auf der Begrenzung des Ringsektors, $R = R(r_1, r_2, \vartheta_1, \vartheta_2)$ für eine Funktion $f(x)$, so gilt sie auch für diejenige Funktion $F(x)$, welche durch die Gleichung

$$\frac{d}{dx}x\cdot F(x) = f(x)$$

definiert ist.

(Dies ist auch dann noch der Fall, wenn an Stelle des Ringsektors R ein Kreissektor $S = S(r_2, \vartheta_1, \vartheta_2)$ tritt, wie sich leicht beweisen läßt.)

Wäre man also in der vorigen Betrachtung statt von $f(x)$ von $F(x)$ ausgegangen, so hätte sich ergeben:

$$25)\qquad \underset{r_1}{\overset{r_2}{M}}\left(\frac{x}{r}f(x)\right)_\vartheta - \underset{r_1}{\overset{r'}{M}}\left(\frac{x}{r}f(x)\right)_\vartheta - \underset{r'}{\overset{r_2}{M}}\left(\frac{x}{r}f(x)\right)_\vartheta = 0,$$

für alle ϑ des Intervalles

$$\vartheta_1 < \vartheta \leq \vartheta_2$$

und alle r' des Intervalles

$$r_1 < r' \leq r_2,$$

d. h. für alle Vektorstücke im Innern oder auf der Begrenzung des Ringsektors $R = R(r_1 r_2,\ \vartheta_1 \vartheta_2)$.

Hinsichtlich der Mittelwerte über den Kreisbogen gilt eine ähnliche Additionsformel. Sei wieder $f(x)$ eine Funktion, welche im Innern und auf der Begrenzung des Ringsektors $R(r_1,\ r_2,\ \vartheta_1,\ \vartheta_2)$ der Voraussetzung (A) genügt. Sei ferner $\vartheta_1 \leq \vartheta' \leq \vartheta_2$, so sollen jetzt unter R_1' und R_2' bzw. die beiden Ringsektoren

$$R(r_1,\ r_2,\ \vartheta_1,\ \vartheta') \quad \text{und} \quad R(r_1,\ r_2,\ \vartheta',\ \vartheta_2)$$

verstanden werden (siehe Fig. 3).

Dann ergibt sich wie oben aus der Relation

$$\underset{(R)}{Mf(x)} = \underset{(R_1')}{Mf(x)} = \underset{(R_2')}{Mf(x)} = 0$$

oder

$$\underset{(R)}{Mf(x)} = \underset{R_1'}{Mf(x)} + \underset{R_2'}{Mf(x)} = 0$$

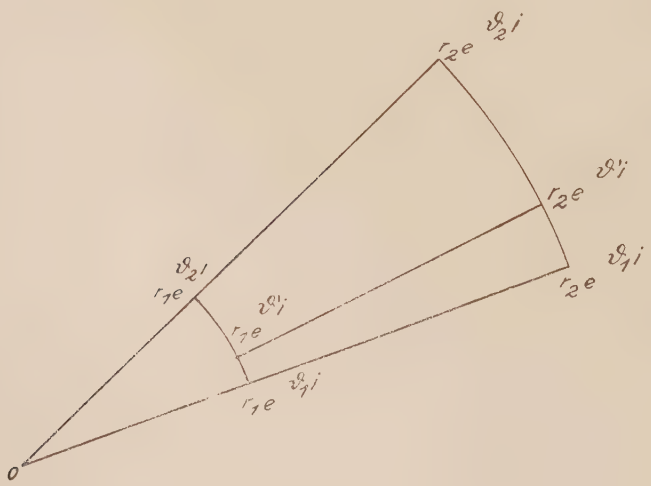

Fig. 3.

die Beziehung

$$\underset{\vartheta_1 i}{\overset{\vartheta_2 i}{M}}(x f(x))_{r_1} - \underset{\vartheta_1 i}{\overset{\vartheta' i}{M}}(x \cdot f(x))_{r_1} - \underset{\vartheta' i}{\overset{\vartheta_2 i}{M}}(x f(x))_{r_1}$$
$$= \underset{\vartheta_1 i}{\overset{\vartheta_2 i}{M}}(x \cdot f(x))_{r_2} - \underset{\vartheta_1 i}{\overset{\vartheta' i}{M}}(x f(x))_{r_2} - \underset{\vartheta' i}{\overset{\vartheta_2 i}{M}}(x f(x))_{r_2}.$$

Durch analoge Rechnung folgt hieraus

26) $$\underset{\vartheta_1 i}{\overset{\vartheta_2 i}{M}}(x f(x))_{r_1} - \underset{\vartheta_1 i}{\overset{\vartheta' i}{M}}(x f(x))_{r} - \underset{\vartheta' i}{\overset{\vartheta_2 i}{M}}(x f(x))_{r} = 0.$$

Für alle r des Intervalles

$$r_1 \leqq r \leqq r_2$$

und alle ϑ' des Intervalles

$$\vartheta_1 \leqq \vartheta' < \vartheta_2,$$

also für alle Kreisbögen im Innern des Ringsektors

$$R = R(r_1,\ r_2,\ \vartheta_1,\ \vartheta_2).$$

Gleichung 26) ergibt sich direkt, wenn man voraussetzt, daß die Bedingung (A) für einen Sektor

$$S = S(r_2,\ \vartheta_1,\ \vartheta_2)$$

erfüllt ist. Dann treten an Stelle der Ringsektoren R, $R_1' R_2'$ bzw. die Kreissektoren

$$S = S(r_2,\ \vartheta_1 \vartheta_2), \quad S_1' = S(r_2,\ \vartheta_1,\ \vartheta'), \quad S_2'(r_2,\ \vartheta',\ \vartheta_2).$$

Die Gleichung

$$\underset{(S)}{M} f(x) = \underset{S_1'}{M} f(x) + \underset{S_2'}{M} f(x) = 0$$

liefert dann nach Einsetzen der Werte 14b) direkt die verlangte Beziehung.

Durch die Anwendung der beiden Additionsformeln 25) und 26) beweist man sofort die Richtigkeit der Gleichung

$$27) \qquad \begin{cases} \underset{(R)}{M} f(x) = \underset{(R_1)}{M} f(x) + \underset{R_2}{M} f(x), \\ \underset{R}{M} f(x) = \underset{R_1'}{M} f(x) + \underset{R_2'}{M} f(x) \end{cases}$$

falls

$$\begin{aligned} R &= R(r_1, r_2, \vartheta_1, \vartheta_2) \\ R_1 &= R(r_1, r', \vartheta_1, \vartheta_2) \\ R_2 &= R(r', r_2, \vartheta_1, \vartheta_2) \\ R_1' &= R(r_1, r_2, \vartheta_1, \vartheta') \\ R_2' &= R(r_1, r_2, \vartheta', \vartheta_2) \end{aligned}$$

gesetzt wird, wobei

$$r_1 \leqq r' \leqq r_2, \quad \vartheta_1 \leqq \vartheta' \leqq \vartheta_2$$

ist.

Bemerkung:

Ist $f(x)$ eine analytische Funktion, so erfüllt dieselbe im Innern ihres ganzen Regularitätsbereiches die Voraussetzung (A). Ist dann $f(x)$ auf einem Vektorstück bzw. auf einem Kreisbogen regulär, so gilt dasselbe von einer gewissen Umgebung der genannten Linienstücke. Dieselben lassen sich also in beliebig schmale Ringsektoren einschließen.

Im Innern und auf der Begrenzung derselben gelten dann die Additionsformeln 25) und 26). Herrscht also auf den Begrenzungslinien der Ringsektoren R, R_1, R_2 bzw. R, R_1', R_2' in der obenstehenden Bezeichnungsweise Regularität, so gelten die Formeln 27), ohne daß über das Verhalten der Funktion im Innern der betreffenden Ringsektoren irgendwelche Voraussetzungen gemacht zu werden brauchen. Ist speziell $f(x)$ auch im Innern der betreffenden Ringsektoren regulär, so gehen die Gleichungen 27) über in

27a)
$$\begin{cases} \underset{(R)}{Mf(x)} = \underset{(R_1)}{Mf(x)} + \underset{(R_2)}{Mf(x)} = 0 \\ \underset{(R)}{Mf(x)} = \underset{(R_1')}{Mf(x)} + \underset{(R_2')}{Mf(x)} = 0, \end{cases}$$

wobei jeder Bestandteil einzeln gleich Null ist.

Mit Hilfe der Additionsformeln 25) und 26) läßt sich nun folgender Fundamentalsatz beweisen:

Satz I:

Es sei C eine der oben (siehe S. 23) definierten Linien, welche noch den besonderen Bedingungen genügen soll,

a) einfach geschlossen zu sein, eine Forderung, die sich analytisch durch die Gleichungen ausdrücken läßt

28)
$$\begin{cases} r_{m+1} = r_1 \\ \vartheta_m = \vartheta_1 + 2\pi; \end{cases}$$

b) jeden vom Nullpunkt aus nach einem ihrer Begrenzungspunkte gezogenen Radiusvektor ganz in ihrem Innern zu enthalten.

Ist dann $f(x)$ eine im Innern und auf der Begrenzung dieser Linie reguläre analytische Funktion, so ist

29)
$$\underset{(C)}{Mf(x)} = 0.$$

Beweis:

Nach Definition 12a) ist:

$$\underset{(C)}{Mf(x)} = \sum_1^m{}^{\mu} \overset{r_{\mu+1}}{\underset{r_\mu}{M}} \left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_\mu} + \sum_1^{m-1}{}^{\mu} \overset{\vartheta_{\mu+1}{}^i}{\underset{\vartheta_\mu{}^i}{M}} (x f(x))_{r_{\mu+1}};$$

dann darf aber, da auf jedem Radiusvektor bis zum Nullpunkt nach Voraussetzung Regularität herrscht, nach Formel 25) gesetzt werden:

$$\overset{r_{\mu+1}}{\underset{r_\mu}{M}} \left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_\mu} = \overset{r_{\mu+1}}{\underset{0}{M}} \left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_\mu} - \overset{r_\mu}{\underset{0}{M}} \left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_\mu}.$$

Und es folgt:

$$\underset{(C)}{M} f(x) = \sum_{1}^{m}{}^{\mu} \underset{0}{\overset{r_{\mu+1}}{M}} \left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_\mu} - \sum_{1}^{m}{}^{\mu} \underset{0}{\overset{r_\mu}{M}} \left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_\mu}$$

$$+ \sum_{1}^{m-1}{}^{\mu} \underset{\vartheta_\mu i}{\overset{\vartheta_{\mu+1} i}{M}} (x \cdot f(x))_{r_{\mu+1}} = \sum_{1}^{m}{}^{\mu} \underset{0}{\overset{r_{\mu+1}}{M}} \left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_\mu} - \sum_{0}^{m-1}{}^{\mu} \underset{0}{\overset{r_{\mu+1}}{M}} \left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_{\mu+1}}$$

$$+ \sum_{1}^{m-1}{}^{\mu} \underset{\vartheta_\mu i}{\overset{\vartheta_{\mu+1} i}{M}} (x \cdot f(x))_{r_{\mu+1}} = \sum_{1}^{m-1}{}^{\mu} \left(\underset{0}{\overset{r_{\mu+1}}{M}} \left[\left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_\mu} - \left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_{\mu+1}} \right] \right.$$

$$\left. + \underset{\vartheta_\mu i}{\overset{\vartheta_{\mu+1} i}{M}} (x \cdot f(x))_{r_{\mu+1}} \right) + \underset{0}{\overset{r_{m+1}}{M}} \left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_m} - \underset{0}{\overset{r_1}{M}} \left(\frac{x}{r} f(x)\right)_{\vartheta_1}.$$

Die beiden letzten Glieder rechts heben sich auf (vgl. die Formeln 28) und 8) und es folgt unter Zuhilfenahme der Definition 14 b), wenn unter S_μ der Sektor $S(r_\mu, \vartheta_\mu, \vartheta_{\mu+1})$ verstanden wird:

$$\underset{(C)}{M} f(x) = \sum_{1}^{m-1}{}^{\mu} \underset{(S_\mu)}{M} f(x) = 0,$$

da die Mittelwerte über die einzelnen Sektoren Null sind.

Durch spezielle Wahl der Linie C kann man den von ihr umschlossenen Bereich dem Innern des zur Funktion $f(x)$ gehörigen Mittag - Lefflerschen Zentralsterns beliebig annähern [1]).

Sei nämlich K der Radius eines beliebig großen Kreises, auf dessen Peripherie sich $f(x)$ regulär verhält, sei ferner $\alpha = \varrho e^{i\varphi}$ im Innern dieses Kreises gelegene singuläre Stelle von $f(x)$ und bedeuten ε und δ positive, beliebig zu verkleinernde Zahlen. Bildet man dann den Ringsektor (siehe Fig. 4)

$$R_\alpha = R(\varrho - \varepsilon,\ K,\ \varphi - \delta,\ \varphi + \delta),$$

[1]) Über den Begriff des Mittag-Lefflerschen Zentralsterns siehe: „Sur la représentation d'une branche uniforme d'une fonction monogène", Note I, Acta math., Bd. 23, p. 47 oder Vivanti-Gutzmer, Theorie der analytischen Funktionen, p. 355.

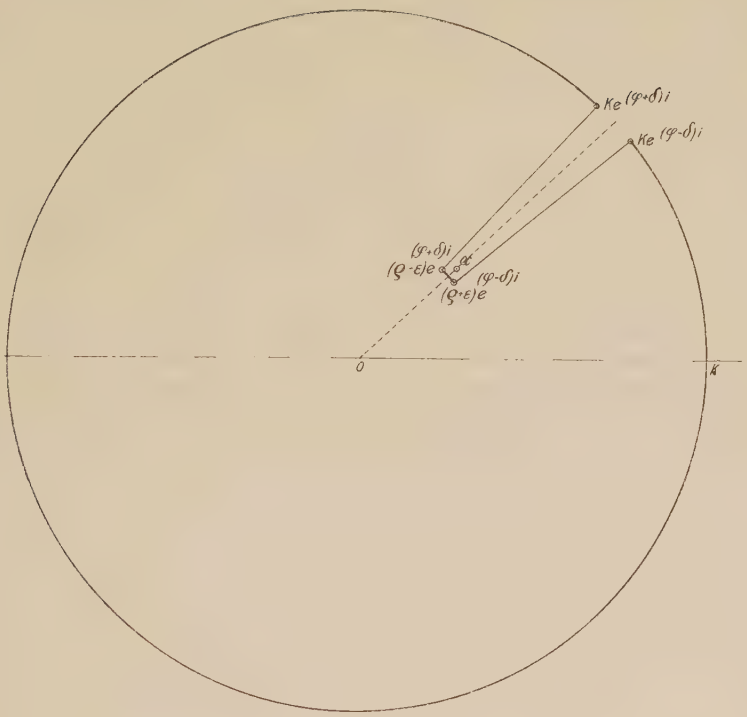

Fig. 4.

so liegt α im Innern desselben. Schließt man alle im Innern des Kreises mit dem Radius K gelegenen singulären Stellen von $f(x)$ in solche Ringsektoren ein, welche durch hinlängliche Verkleinerung von ε und δ beliebig schmal gemacht werden können, so nähert sich das Gebiet im Innern des Kreises mit dem Radius K, welches nach Ausschluß aller dieser Ringsektoren aus der Kreisfläche übrig bleibt, durch Vergrößerung von K und Verkleinerung von ε und δ dem Innern des Mittag-Lefflerschen Zentralsterns. Die spezielle, dasselbe umschließende Linie C, welche als „Linie C^* der Funktion $f(x)$“ bezeichnet werden möge, leistet also in der Tat das Verlangte.

Satz II:

Genügt die Linie C und die Funktion $f(x)$ den Voraussetzungen des Satzes I, so wird behauptet: Es ist

30a) $$\underset{(C)}{M} \frac{f(x)}{x - z} = 0$$

für alle z außerhalb der Linie C und

30b) $$\underset{(C)}{M} \frac{f(x)}{x - z} = 2\pi i \cdot f(z)$$

für alle z innerhalb der Linie C.

Beweis:

Nach Satz I ist

$$\underset{(C)}{M} F(x) = 0,$$

wenn $F(x)$ innerhalb und auf der Linie C regulär ist. Es soll aber nach Voraussetzung $f(x)$ diese Bedingung erfüllen, also gilt dasselbe von $\frac{f(x)}{x - z}$, solange der Faktor $\frac{1}{x - z}$ endlich bleibt, wobei x jeden Wert im Innern und auf der Begrenzung von C bedeutet. Dies ist nur dann der Fall, wenn z außerhalb von C liegt. Also ist in diesem Falle nicht nur

$$\underset{(C)}{M} f(x) = 0$$

sondern auch

$$\underset{(C)}{M} \frac{f(x)}{x - z} = 0.$$

Liegt dagegen z im Innern von C, so ist die Stelle $x = z$ ein Pol erster Ordnung von $\frac{f(x)}{x - z}$, welcher ins Innere des von C umschlossenen Bereiches fällt. Bezeichnet man dann mit C' diejenige Linie, welche aus C entsteht, wenn man die Stelle $x - z$ durch einen beliebig schmalen Ringsektor aus derselben ausschneidet, so ist nach Formel 30a)

$$\underset{(C)}{M} \frac{f(x)}{x - z} = 0.$$

Sei

$$z = r \cdot e^{i\vartheta}.$$

Der Radiusvektor mit dem Polarwinkel ϑ möge die Linie C im Punkte $Ke^{i\vartheta}$ treffen. Dann soll gesetzt werden

$$31) \quad \begin{cases} r - \varepsilon = r_1 \\ r + \varepsilon = r_2 \\ \vartheta - \delta = \vartheta_1 \\ \vartheta + \delta = \vartheta_2, \end{cases}$$

wobei ε und δ beliebig kleine, positive Zahlen bedeuten.

Ferner werde mit R, R_1, R_2, R_1' bzw. der Ringsektor

$$32) \quad \begin{cases} R = R(r_1, K, \vartheta_1, \vartheta_2) \\ R_1 = R(r_1, r_2, \vartheta_1, \vartheta_2) \\ R_2 = R(r_2, K, \vartheta_1, \vartheta_2) \\ R_1' = R(r_1, r_2, \vartheta_2, \vartheta_1 + 2\pi) \end{cases}$$

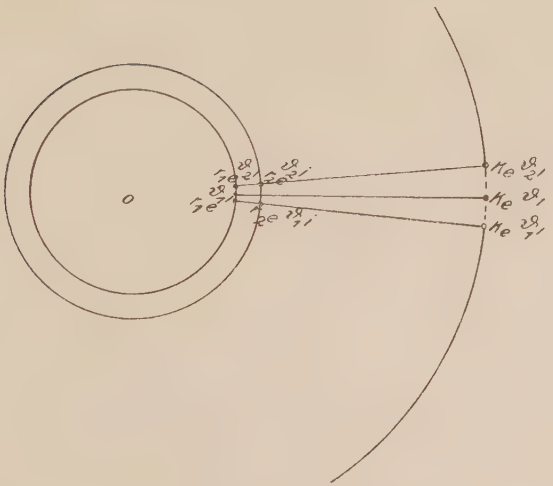

Fig. 5.

bezeichnet (siehe Fig. 5). Es ist aber

$$33) \qquad \underset{(C')}{M} \frac{f(x)}{x-z} = \underset{(C)}{M} \frac{f(x)}{x-z} - \underset{(K)}{M} \frac{f(x)}{x-z} = 0.$$

Auf Grund der Voraussetzungen über die Regularität von $f(x)$ im Innern der Linie C ist

$$\underset{(R_2)}{M} \frac{f(x)}{x-z} = 0,$$

da die Stelle $x = z$ außerhalb dieses Ringsektors liegt. Dann ist aber nach Formel 27) (vgl. hierzu die Bemerkung S. 34)

$$\underset{(K)}{M} \frac{f(x)}{x-z} - \underset{(R_2)}{M} \frac{f(x)}{x-z} = \underset{(R_1)}{M} \frac{f(x)}{x-z}.$$

Also folgt:

$$34) \qquad \underset{(C)}{M} \frac{f(x)}{x-z} = \underset{(R_1)}{M} \frac{f(x)}{x-z}.$$

ε und δ können so klein genommen werden, daß auf der Begrenzung des Ringsektors R_1 die Entwicklung von $f(x)$ nach Potenzen von $x - z$ konvergiert. Dann ist aber

$$35) \qquad \frac{f(x) - f(z)}{x-z} = \sum_{1}^{\infty \nu} (x-z)^{\nu-1} \left(\frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu} \right)_{x=z}$$

im Innern und auf der Begrenzung dieses Ringsektors regulär und es wird, wenn man noch von Formel 5) Gebrauch macht:

$$\underset{(R_1)}{M} \frac{f(x)}{x-z} = \underset{(R_1)}{M} \frac{f(x) - f(z) + f(z)}{x-z}$$

$$= \underset{(R_1)}{M} \frac{f(x) - f(z)}{x-z} + f(z) \underset{R_1}{M} \frac{1}{x-z}$$

$$36) \qquad \underset{(R_1)}{M} \frac{f(x)}{x-z} = f(z) \underset{(R_1)}{M} \frac{1}{x-z}.$$

Die rechte Seite läßt sich auswerten:

$$\underset{(R_1)}{M}\frac{1}{x-z} \equiv \overset{r_2}{\underset{r_1}{M}}\left(\frac{x}{r}\frac{1}{x-z}\right)_{\vartheta_1} - \overset{r_2}{\underset{r_1}{M}}\left(\frac{x}{r}\frac{1}{x-z}\right)_{\vartheta_2}$$
$$+ \underset{\vartheta_1 i}{\overset{\vartheta_2 i}{M}}\left(\frac{x}{x-z}\right)_{r_2} - \underset{\vartheta_1 i}{\overset{\vartheta_2 i}{M}}\left(\frac{x}{x-z}\right)_{r_1}.$$

Für den zu R_1 komplementären Ringsektor R_1' gilt dagegen nach Satz I:

$$0 = \underset{(R_1')}{M}\frac{1}{x-z} \equiv \overset{r_2}{\underset{r_1}{M}}\left(\frac{x}{r}\cdot\frac{1}{x-z}\right)_{\vartheta_2} - \overset{r_2}{\underset{r_1}{M}}\left(\frac{x}{r}\cdot\frac{1}{x-z}\right)_{\vartheta_1+2\pi}$$
$$+ \underset{\vartheta_2 i}{\overset{(\vartheta_1+2\pi)i}{M}}\left(\frac{x}{x-z}\right)_{r_2} - \underset{\vartheta_2 i}{\overset{(\vartheta_1+2\pi)i}{M}}\left(\frac{x}{x-z}\right)_{r_1}.$$

Also ergibt sich durch Addition beider Formeln unter Anwendung von Formel 26)

36 a) $$\underset{(R_1)}{M}\frac{1}{x-z} = \underset{\vartheta_1 i}{\overset{(\vartheta_1+2\pi)i}{M}}\left(\frac{x}{x-z}\right)_{r_2} - \underset{\vartheta_1 i}{\overset{(\vartheta_1+2\pi)i}{M}}\left(\frac{x}{x-z}\right)_{r_1}.$$

Der zweite Mittelwert der rechten Seite ist Null, da $|z| > r_1$ ist, also z außerhalb des Kreises mit dem Radius r_1 liegt; für den ersten gilt wegen $|z| < r_2$ die Entwicklung

$$\underset{\vartheta_1 i}{\overset{(\vartheta_1+2\pi)i}{M}}\left(\frac{x}{x-z}\right)_{r_2} = \underset{\vartheta_1 i}{\overset{(\vartheta_1+2\pi)i}{M}}\sum_0^\infty{}^{\nu}\left(\frac{z}{x}\right)^\nu = \sum_0^\infty{}^{\nu}\underset{\vartheta_1 i}{\overset{(\vartheta_1+2\pi)i}{M}}\left(\frac{z}{x}\right)^\nu$$

und hieraus folgt nach Formel 11)

$$\underset{\vartheta_1 i}{\overset{(\vartheta_1+2\pi)i}{M}}\left(\frac{x}{x-z}\right)_{r_2} = 2\pi i,$$

also schließlich

37) $$\underset{(R_1)}{M}\frac{1}{x-z} = 2\pi i.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in Gleichung 36) ergibt sich

$$\underset{(R_1)}{M}\frac{f(x)}{x-z} = f(z)\cdot 2\pi i,$$

Gleichung 34) geht somit wie behauptet über in

$$M_{(C)} \frac{f(x)}{x - z} = 2\pi i \cdot f(z).$$

Mit Hilfe des Mittelwertes über den Weg C läßt sich ferner der Hadamardsche [1]) Satz beweisen. Da aber der Beweis im wesentlichen mit dem auf Grund des Cauchyschen Randintegrals gewonnenen übereinstimmt, möge er hier nur kurz skizziert werden.

Seien $f_a(x)$, $f_b(x)$ analytische Funktionen mit den singulären Stellen α bzw. β, den Anfangselementen

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu \quad \text{bzw.} \quad \sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu$$

und den Konvergenzradien R_a bzw. R_b.

C sei eine der oben charakterisierten Linien, die im Innern des Regularitätsbereiches von $f_a(x)$ verläuft. Dann ist nach Formel 30b):

$$M_{(C)} \frac{f_a(x)}{x} = 2\pi i f(0) = 2\pi i \cdot a_0$$

und

38) $$M_{(C)} \frac{f_a(x)}{x - z} = 2\pi i \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu z^\nu,$$

falls z im Innern des Konvergenzkreises R_a und der Linie C liegt.

Es ist also immer $|z| < |x|$, wenn x einen Wert der Linie C bedeutet und folglich konvergiert die Entwicklung von $\frac{1}{x - z}$ nach Potenzen von $\frac{z}{x}$. Nach Formel 6) über die Vertauschbarkeit von Summation und Mittelwertbildung wird also

39) $$M_{(C)} \frac{f_a(x)}{x - z} = M_{(C)} \frac{f_a(x)}{x} \sum_0^\infty{}^\nu \left(\frac{z}{x}\right)^\nu = \sum_0^\infty{}^\nu z^\nu M_{(C)} \frac{f_a(x)}{x^{\nu+1}}.$$

---

[1]) „La série de Taylor et son prolongement analytique." Scientia, p. 69.

Und durch Vergleichung der Formeln 38) und 39) ergibt sich schließlich

40) $$\frac{1}{2\pi i} M_{(C)} \frac{f_a(x)}{x^{\nu+1}} = a_\nu .$$

Schränkt man z so ein, daß $f_b\left(\frac{z}{x}\right)$ im Innern von C regulär ist, so existiert für alle diese z der Mittelwert

$$M_{(C)} \frac{f_a(x)}{x} \cdot f_b\left(\frac{z}{x}\right) = f_{ab}(z).$$

Dabei muß z auf das Innere der Linien $C \cdot \beta$ beschränkt werden. Nimmt man speziell für C die Seite 37 definierte Linie C^* der Funktion $f_a(x)$, welche einen Bereich umschließt, der sich den Zentralstellen von $f_a(x)$ beliebig nähert, so wird z auf das Innere derjenigen Linie beschränkt, die aus der Gesamtheit der Linien $C^* \cdot \beta$ besteht, also aus einem äußeren Kreise mit dem Radius $K\beta_0$, falls β_0 die dem Nullpunkt am nächsten gelegene singuläre Stelle von $f_b(x)$ ist, aus dem die Stellen $\alpha \cdot \beta$ durch beliebig schmale Ringsektoren ausgeschnitten sind. Innerhalb dieses Bereiches für z ist aber $f_{ab}(z)$ eine analytische Funktion von z.

Da

$$\left|\frac{z}{x}\right| \gtrless \beta ,$$

läßt sich $f_b\left(\frac{z}{x}\right)$ nach Potenzen von $\frac{z - z_0}{x}$ entwickeln:

$$f_b\left(\frac{z}{x}\right) = \sum_0^\infty{}^{\nu} b'_\nu \left(\frac{z - z_0}{x}\right)^\nu .$$

Infolge der gleichmäßigen Konvergenz dieser Reihe folgt aus Formel 6) mit Berücksichtigung von Formel 40)

$$M_{(C)} \frac{f_a(x)}{x} f_b\left(\frac{z}{x}\right) = \sum_0^\infty{}^{\nu} M_C \frac{f_a(x)}{x^{\nu+1}} b'_\nu (z - z_0)^\nu = \sum_0^\infty{}^{\nu} (z - z_0)^\nu a_\nu b'_\nu ;$$

ist z ein Punkt im Innern des Konvergenzkreises R_b von

$$\sum_0^{\infty\nu} b_\nu x^\nu,$$

so kann $z_0 = 0$ folglich $b'_\nu = b_\nu$ angenommen werden und es wird

41) $$M_{(C)} \frac{f_a(x)}{x} f_b\left(\frac{z}{x}\right) = \sum_0^{\infty\nu} a_\nu b_\nu z^\nu = f_{ab}(z).$$

Wir haben damit das Resultat; die analytische Funktion mit dem Anfangselemente

$$\sum_0^{\infty\nu} a_\nu b_\nu x^\nu$$

besitzt einen Zentralstern, welcher außer den Spitzen $\alpha \cdot \beta$ keine anderen besitzen kann. Es bliebe jedoch zunächst die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß in den ausgeschiedenen Ringsektoren, also in letzter Linie auf den von den Punkten $\alpha \cdot \beta$ aus ins Unendliche gezogenen Strahlen, noch singuläre Stellen der Funktion $f_{ab}(x)$ lägen. Daß tatsächlich die Punkte $\alpha \cdot \beta$ die einzig möglichen singulären Stellen von $f_{ab}(x)$ sind, erkennt man daraus, daß man den Mittelpunkt des Sternes und damit auch seine Strahlen innerhalb des gemeinsamen Regularitätsbereiches der Funktionen $f_a(x)$, $f_b(x)$ beliebig verlegen kann, wobei aber die auszuschließenden Stellen $\alpha \cdot \beta$ jedesmal festbleiben.

Durch analoge Überlegungen ließe sich auch der Hurwitzsche[1]) Satz beweisen. Da er sich aber sehr einfach als eine Folgerung aus dem Hadamardschen ergibt und meines Wissens diese Beziehung, in der die beiden Sätze zueinander stehen, noch nicht publiziert ist, darf hier wohl der kurze Beweis eingeschaltet werden.

Seien $f_a(z)$, $f_b(z)$ analytische Funktionen mit den singulären Stellen α bzw. β, den Anfangselementen

$$1 + \sum_1^{\infty\lambda} a_\lambda z^{\lambda+1} \quad \text{bzw.} \quad 1 + \sum_1^{\infty\lambda} b_\lambda z^{\lambda+1}$$

und den Konvergenzradien R_a bzw. R_b.

---

[1]) Comptes rendus, 6. Februar 1899.

Setzt man dann $z = \frac{1}{x}$, so hat

$f_b\left(\frac{1}{x}\right)$ die singulären Stellen $x = \frac{1}{\beta}$

$f_b \frac{1}{x-h}$ die singulären Stellen $x = h + \frac{1}{\beta}$,

die Reihe

$$1 + \sum_1^\infty{}^{\lambda} b_\lambda \left(\frac{1}{x-h}\right)^{\lambda+1}$$

konvergiert dann für

$$|x-h| > \frac{1}{R_b}.$$

Für $|h| < |x|$ darf sie nach Potenzen von h entwickelt werden und lautet dann:

41a) $$1 + \sum_1^\infty{}^{\lambda} b_\lambda \left(\frac{1}{x-h}\right)^{\lambda+1} = 1 + \sum_1^\infty{}^{\nu} h^\nu \sum_0^\infty{}^{\lambda} \binom{\lambda+\nu}{\nu} \frac{b_\lambda}{x^{\lambda+\nu+1}}.$$

Diese Reihe konvergiert sicher, wenn die beiden Bedingungen

$$|x-h| > \frac{1}{R_b}$$

$$|x| > |h|$$

gleichzeitig erfüllt sind. Wegen $|x-h| \geq ||x| - |h||$ wird somit ein vorläufiger Konvergenzbereich der Reihe 41) durch die Beziehungen

$$||x| - |h|| > \frac{1}{R_b} \quad \text{und} \quad |x| > |h|$$

oder nach Zusammenfassung dieser beiden durch

42) $$|h| < |x| - \frac{1}{R_b}$$

gegeben.

Ist Ungleichung 42) erfüllt, so definiert die Reihe 41) eine analytische Funktion mit dem vorläufigen Konvergenzkreise

$$|h| = |x| - \frac{1}{R_b}$$

und den singulären Stellen

$$h = x - \frac{1}{\beta}.$$

Dasselbe gilt für die Reihe

$$h + \sum_0^\infty{}^{\nu} h^{\nu+1} \sum_0^\infty{}^{\lambda} \binom{\lambda+\nu}{\nu} \frac{b_\lambda}{x^{\lambda+\nu+1}}.$$

Dann definiert aber nach dem Hadamardschen Satze die Reihe

$$h + \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu h^{\nu+1} \sum_0^\infty{}^{\lambda} \binom{\lambda+\nu}{\nu} \frac{b_\lambda}{x^{\lambda+\nu+1}}$$

mit dem vorläufigen Konvergenzkreise

43) $$|h| = R_a \left(|x| - \frac{1}{R_b} \right)$$

eine Funktion, welche nur die singulären Stellen

44) $$h = a \cdot \left(x - \frac{1}{\beta} \right)$$

besitzen kann. Für $h = 1$ geht diese Reihe über in

$$\begin{aligned} 1 + \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu \sum_0^\infty{}^{\lambda} \binom{\lambda+\nu}{\nu} \frac{b_\lambda}{x^{\lambda+\nu+1}} &= 1 + \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu \sum_\nu^\infty{}^{\lambda} \binom{\lambda}{\nu} b_{\lambda-\nu} \frac{1}{x^{\lambda+1}} \\ &= 1 + \sum_0^\infty{}^{\lambda} \frac{1}{x^{\lambda+1}} \sum_0^\lambda{}^{\nu} a_\nu b_{\lambda-\nu} \cdot \binom{\lambda}{\nu} \\ &= 1 + \sum_0^\infty{}^{\lambda} \frac{c_\lambda}{x^{\lambda+1}}, \end{aligned}$$

wenn

$$c_\lambda = \sum_0^\lambda{}^{\nu} a_\nu b_{\lambda-\nu} \binom{\lambda}{\nu}$$

gesetzt wird.

Als vorläufiger Konvergenzbereich, der durch dieses Anfangselement definierten Funktion ergibt sich aus 43) für $h = 1$ der Wert

$$|x| > \frac{R_a + R_b}{R_a \cdot R_b}.$$

Durch Einsetzen von $h = 1$ in die Relation 44) findet man, daß die singulären Stellen dieser Funktion nur von der Form

45) $$x = \frac{\alpha + \beta}{\alpha \cdot \beta}$$

sein können.

Setzt man endlich

$$\alpha = \frac{1}{\alpha'}, \quad \beta = \frac{1}{\beta'},$$

so haben die Funktionen

$$f_a\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_b\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_{ab}\left(\frac{1}{x}\right)$$

mit den zugehörigen Anfangselementen

$$1 + \sum_1^\infty{}^{\lambda} \frac{a_\lambda}{x^{\lambda+1}}$$

$$1 + \sum_1^\infty{}^{\lambda} \frac{b_\lambda}{x^{\lambda+1}}$$

$$1 + \sum_1^\infty{}^{\lambda} \frac{c_\lambda}{x^{\lambda+1}}$$

die singulären Stellen

$$\alpha \text{ bzw. } \beta, \quad \text{bzw. } \alpha + \beta.$$

Der wahre Konvergenzbereich der Reihe bestimmt sich aus der Lage der singulären Stellen α und β als das Gebiet im Äußeren des Kreises $|x| = \alpha_0' + \beta_0'$, wenn α_0' und β_0' diejenigen unter den Werten α', β' bedeuten, deren Summe den größten absoluten Wert hat.

Durch den Ausdruck

$$\underset{(C^*)}{M} \frac{f(x)}{x - z},$$

wenn mit C^* wieder die (S. 37) definierte, durch die gegebene analytische Funktion $f(x)$ bestimmte Linie C bezeichnet wird, ist zwar ein innerhalb des Zentralsterns der Funktion $f(x)$ gültiges Darstellungsmittel derselben gegeben. Dasselbe erfordert jedoch die Kenntnis der Funktionswerte auf der Linie C^*, welche, falls $f(x)$ nur durch das Anfangselement

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$$

definiert ist, nicht ohne weiteres erreichbar ist. Die von Mittag-Leffler gegebenen Lösungen des Problems, vermöge der gegegebenen Koeffizienten a_ν einen analytischen Ausdruck zu finden, welcher die Funktion $f(x)$ in einem den Konvergenzkreis dieser Reihe überragenden Bereiche darstellt, erscheinen hauptsächlich in den drei folgenden Formen:

a) Als gleichmäßig konvergente, nach Polynomen fortschreitende Reihen:

$$\sum_0^\infty{}^\nu P_\nu(x) = \sum_0^\infty{}^\nu \sum_0^{\mu_\nu}{}^\mu \gamma_{\mu,\nu} x^\mu \text{ [1]}).$$

b) Als gleichmäßig konvergente, $n$fach unendliche Reihen:

$$\sum_0^\infty{}^{\lambda_1} \sum_0^\infty{}^{\lambda_2} \cdots \sum_0^\infty{}^{\lambda_n} \gamma_{\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n} x^{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_n}.$$

c) Als Grenzwerte für $t = \infty$ einer unendlichen Potenzreihe, deren Koeffizienten von einem Parameter t abhängen:

$$\lim_{t=\infty} \sum_0^\infty{}^\nu x^\nu \gamma_\nu(t).$$

---

[1]) Note I: Acta math. 23, p. 43.
II: „ „ 24, p. 183.
IV: „ „ 26, p. 374.

NB. Die Darstellungen c) können auch in Form bestimmter Integrale auftreten. In dieser Form sind sie von Mittag-Leffler ausschließlich studiert worden.

Dann läßt sich folgender Satz beweisen:

„Ist für die Funktion $\frac{1}{1-z}$ eine Darstellung von der Form a), b) oder c) bekannt (wobei in diesen Ausdrücken x durch z zu ersetzen ist), welche in einem den Einheitskreis überragenden Bereiche $A(z)$ gilt, so kann man aus derselben für jede durch ihr Anfangselement

$$\sum_0^\infty{}_\nu \, a_\nu \, x^\nu$$

definierte Funktion $f(x)$ eine analoge Darstellung herleiten, deren Gültigkeitsbereich sich aus dem bekannten Bereiche $A(z)$ und der Lage der singulären Stellen von $f(x)$ bestimmen läßt."

Beweis:

Es sei

$$\varphi(z) = \frac{1}{1-z} \quad \text{für alle Werte von } z \text{ innerhalb } A(z)$$
$$= \infty \quad \text{„ „ „ „ } z \text{ außerhalb } A(z)$$

oder anders geschrieben

$$\varphi(z)\cdot(1-z) = 1 \quad \text{für alle } z \text{ innerhalb des Bereichs } A(z)$$
$$\varphi(z)(1-z) = \infty \quad \text{„ „ } z \text{ außerhalb „ „ } A(z),$$

nach Satz 2 ist

46)
$$\underset{(C')}{M}\frac{f(x)}{x-z} = \underset{(C')}{M}\frac{f(x)}{x\left(1-\frac{z}{x}\right)}\;\varphi\left(\frac{z}{x}\right)\cdot\left(1-\frac{z}{x}\right)$$
$$= \underset{(C')}{M}\frac{f(x)}{x}\cdot\varphi\left(\frac{z}{x}\right)$$
$$= f(z)$$

für alle $\frac{z}{x}$ innerhalb des Bereiches

$$A\left(\frac{z}{x}\right),$$

wobei x die, nur von der Lage der singulären Stellen von $f(x)$ abhängige Linie C^* durchläuft.

Ist nun z. B. $\varphi(z)$ von der Form a), so wird mit Bezugnahme auf Formel 6) wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\underset{(C^*)}{M}\frac{f(x)}{x}\varphi\left(\frac{z}{x}\right) &= \frac{1}{2\pi i}\underset{(C^*)}{M}\frac{f(x)}{x}\sum_0^\infty{}^{\nu}\sum_0^{\mu_\nu}{}^{\mu}\gamma_{\mu,\nu}\left(\frac{\mu}{x}\right) \\ &= \sum_0^\infty{}^{\nu}\sum_0^{\mu_\nu}{}^{\mu}\gamma_{\mu,\nu}z^\mu\underset{(C^*)}{M}\left(\frac{f(x)}{x^{\mu+1}}\right) \\ &= \left\{\sum_0^\infty{}^{\nu}\sum_0^{\mu_\nu}{}^{\mu}a_\mu\cdot\gamma_{\mu,\nu}z^\mu\right\} \\ &= f(z) \end{aligned} \tag{48}$$

nach Formel 40).

Ebenso ergibt sich, falls $\varphi(z)$ in der Form b) vorausgesetzt wird,

$$\frac{1}{2\pi i}\underset{(C^*)}{M}\frac{f(x)}{x}\sum_0^\infty{}^{\lambda_1}\sum_0^\infty{}^{\lambda_2}\cdots\sum_0^\infty{}^{\lambda_n}\gamma_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}\left(\frac{z}{x}\right)^{\lambda_1+\lambda_2\ldots+\lambda_n} \tag{48a}$$

$$=\sum_0^\infty{}^{\lambda_1}\sum_0^\infty{}^{\lambda_2}\cdots\sum_0^\infty{}^{\lambda_n}(a_{\lambda_1+\lambda_2\ldots\lambda_n}\gamma_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}z^{\lambda_1+\lambda_2\ldots+\lambda_n})=f(z).$$

Für die Form c), welche Borels verallgemeinerten Grenzwert als speziellen Fall enthält, soll, um Wiederholungen zu vermeiden, der Beweis, der sich im allgemeinen Falle ganz analog gestaltet, an diesem speziellen Beispiel geführt werden.

§ 3.

Der Ausdruck:

1) $$\lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{t^\nu}{\nu!} \sum_0^\nu{}^{\lambda} z^\lambda,$$

welcher durch Anwendung der exponentiellen Summation auf die Funktion $\frac{1}{1-z}$ entsteht, kann in verschiedener Weise in einen äquivalenten umgeformt werden.

Zunächst entsteht durch Vertauschung der Summationsfolge die Form

2) $$\lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_0^\infty{}^{\nu} z^\nu \sum_{\nu+1}^\infty{}^{\lambda} \frac{t^\lambda}{\lambda!},$$

dann durch Ausführung der Summation in 1)

3) $$\frac{1}{1-z}(1 - e^{-t(1-z)})$$

mit Hilfe der Substitution $t = \varphi(\mu)$, (wobei $\varphi(0) = 0$, $\lim_{\mu=\infty} \varphi(\mu) = \infty$ siehe § 1 Formel 21)) läßt sich endlich der Ausdruck 2) in Form einer gleichmäßig konvergenten Reihe darstellen, nämlich

4) $$\sum_0^\infty{}^{\mu} \left[e^{-\varphi(\mu+1)} \sum_0^\infty{}^{\nu} z^\nu \sum_{\nu+1}^\infty{}^{\lambda} \frac{\varphi(\mu+1)^\lambda}{\lambda!} - e^{-\varphi(\mu)} \sum_0^\infty{}^{\nu} z^\nu \sum_{\nu+1}^\infty{}^{\lambda} \frac{\varphi(\mu)^\lambda}{\lambda!} \right].$$

Die Form 3) läßt sofort erkennen, daß der Gültigkeitsbereich $A(z)$ dieser sämtlichen Darstellungen durch die Ungleichung

$$\Re(z) < 1$$

bestimmt ist. Das Summationspolygon ist also in diesem Falle, wenn $z = \xi + \eta i$ gesetzt wird, die nach rechts durch die Gerade $\xi = 1$ begrenzte Halbebene.

Durch Einsetzen des Ausdrucks 2) in die allgemeine Formel 46), § 2 ergibt sich, wenn die Linie C^* wieder die S. 37 dargelegte Bedeutung hat:

$$\frac{1}{2\pi i}\underset{(C^*)}{M}\frac{f(x)}{x}\lim_{t=\infty} e^{-t}\sum_0^\infty{}^{\nu}\left(\frac{z}{x}\right)^{\nu}\sum_{\nu+1}^\infty{}^{\lambda}\frac{t^\lambda}{\lambda!} = f(z).$$

In diesem Ausdruck sind aber die Operationen des Grenzüberganges und der Mittelwertbildung vertauschbar, wie sich erkennen läßt, wenn man den Ausdruck 2) durch die ihm äquivalente, gleichmäßig konvergente Reihe 4) ersetzt. Es wird also:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\underset{(C^*)}{M}\frac{f(x)}{x}\lim_{t=\infty} e^{-t}\sum_0^\infty{}^{\nu}\left(\frac{z}{x}\right)^{\nu}\sum_{\nu+1}^\infty{}^{\lambda}\frac{t^\lambda}{\lambda!}\\
&\qquad = \lim_{t=\infty}\frac{e^{-t}}{2\pi i}\sum_0^\infty{}^{\nu} z^\nu\sum_{\nu+1}^\infty{}^{\lambda}\frac{t^\lambda}{\lambda!}\underset{(C^*)}{M}\frac{f(x)}{x^{\nu+1}}\\
5)\qquad &\qquad = \lim_{t=\infty} e^{-t}\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu z^\nu\sum_{\nu+1}^\infty{}^{\lambda}\frac{t^\lambda}{\lambda!}\\
&\qquad = \lim_{t=\infty} e^{-t}\sum_0^\infty{}^{\nu}\frac{t^\nu}{\nu!}s_\nu(x)\\
&\qquad = f(z).
\end{aligned}$$

Der Gültigkeitsbereich dieser Darstellung wird gegeben durch die Bedingung

$$6)\qquad \Re\left(\frac{z}{x}\right) < 1,$$

wobei x die Linie C^* durchläuft.

Sei $z = \xi + \eta i$ und $x = \alpha + \beta i$ ein Punkt der Linie C^*, so schreibt sich die Bedingung 6) in der Form

$$\xi\alpha + \eta\beta < \alpha^2 + \beta^2.$$

Errichtet man also in allen Punkten der Linie C^*, deren im Endlichen gelegene Teile sich beliebig wenig von den Strahlen des Mittag-Lefflerschen Zentralsterns unterscheiden, Lote, auf deren Verbindungsstrahlen mit dem Nullpunkt, so

wird durch jedes derartige Lot die Ebene in zwei Halbebenen geteilt. Scheidet man die den Nullpunkt nicht enthaltende Halbebene aus, so gilt die Darstellung in dem übrigbleibenden Teil der Ebene, welcher kein anderer ist als das § 1 S. 13 definierte, sogenannte Summationspoygon, nur mit dem Unterschiede, daß dasselbe jetzt nicht mehr ausschließlich geradlinig begrenzt zu sein braucht. Es kann nämlich, da die singulären Stellen von $f(x)$ nicht mehr auf eine endliche Anzahl beschränkt zu bleiben brauchen, der Fall eintreten, daß dieselben ein lineares Kontinuum erfüllen. Ist dasselbe z. B. ein mit seiner konkaven Seite dem Nullpunkt zugewendeter Kurvenbogen, so ergibt sich für das genannte Polygon ein krummliniges Begrenzungsstück.

Das Bestreben, mit Hilfe der exponentiellen Summation einen Ausdruck zu finden, der die Funktion $\frac{1}{1-x}$ in einem das „Summationspolygon", in diesem Falle also die Halbebene $\Re(x) < 1$, überragenden Bereiche möglicherweise im ganzen Innern ihres Mittag-Lefflerschen Zentralsterns, d. h. also im Innern der ganzen Ebene, mit Ausschluß der reellen Achse von 1 bis ∞, darzustellen imstande ist, führt zu gewissen Erweiterungen des verallgemeinerten Grenzwertes.

Die von Borel[1]) selbst betrachtete Verallgemeinerung fällt nicht unter diesen Typus. Sie entsteht dadurch, daß man den bisher verwandten Grenzwert

$$\lim_{t=\infty} \frac{1}{1-x}(1 - e^{-t(1-x)})$$

durch den Grenzwert

$$\lim_{t=\infty} \frac{1}{1-x}(1 - e^{-t(1-x^{\varkappa})}) \quad (\text{für } \varkappa = 2,\ 3,\ \ldots,\ n\ \ldots)$$

ersetzt. Läßt man $\varkappa$ alle positiven, ganzen Zahlen durchlaufen, so werden die Bereiche $A_{\varkappa}(x)$, für welche

[1]) „Leçons sur les séries divergentes", p. 129.

$$\lim_{t=\infty} \frac{1}{1-x}(1-e^{-t(1-x^{\varkappa})}) = \frac{1}{1-x}$$

ist, definiert durch die Ungleichungen

$$\Re(1-x^{\varkappa}) > 0 \qquad (\varkappa = 2,\ 3,\ \ldots,\ n\ \ldots).$$

Diese Bereiche umfassen aber weder den ursprünglichen Bereich $\Re(1-x) > 0$, noch nähern sie sich mit wachsendem $\varkappa$ dem Zentralstern von $\frac{1}{1-x}$.

Eine andere, von Mittag-Leffler [1]) gegebene Verallgemeinerung beruht auf der Verwendung der Funktion

$$E_a(x) = \sum_0^{\infty \nu} \frac{t^{\nu}}{\Gamma(a\nu+1)}$$

an Stelle der Exponential-Funktion, welche bewirkt, daß

$$\lim_{a=0} \lim_{t=\infty} \left(\sum_0^{\infty \nu} \frac{t^{\nu}}{\Gamma(a\nu+1)} s_{\nu}(x) \right) \frac{1}{E_a(t)} = f(x)$$

ist, im Innern des Zentralsternes von $f(x)$.

Im folgenden wird nun die durch Iteration der exponentiellen Summation gewonnene Erweiterung in Betracht gezogen, welche sich aus der Auffassung des verallgemeinerten Grenzwertes als einer Art von Mittelwertbildung am natürlichsten ergibt. Dieselbe bedeutet, wie schon Hanni [2]) nachwies, nichts anderes als eine Vereinigung der beiden von Mittag-Leffler betrachteten Möglichkeiten eine durch ihre Koeffizienten a_{ν} definierte Funktion, in einem den Konvergenzkreis der Reihe

$$\sum_0^{\infty \nu} a_{\nu} x^{\nu}$$

überragenden Bereiche darzustellen. In dem einen Fall (vgl. § 2, Formel b) wird dies mit Hilfe $n$fach unendlicher Reihen ge-

[1]) Note V, Acta math. 29, p. 101.
[2]) Acta math. 29, p. 25.

leistet, im anderen (vgl. § 2 Formel c) mit Hilfe gewisser Grenzwerte, als deren spezieller Fall Borels verallgemeinerter Grenzwert erscheint.

Während aber Hanni behauptet, dieses Verfahren sei nur imstande, die Funktion $\frac{1}{1-x}$ in einem Teil ihres Zentralsterns darzustellen, soll nun der folgende Satz bewiesen werden:

„Wendet man auf die Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} x^\nu$ n mal hintereinander die exponentielle Summation an, und läßt n hinreichend groß werden, so stellt der Grenzausdruck die Funktion $\frac{1}{1-x}$ in der ganzen Ebene mit Ausnahme einer beliebig kleinen Umgebung der Halbgeraden

$$\xi > 1, \quad \eta + 2\varkappa\pi \ (\varkappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\nu \ldots)$$

dar. Mit Hilfe einer einfachen Modifikation gelingt es dann, die genannten Halbgeraden durch die Halbgeraden

$$\xi > 1, \quad \eta = 2n \cdot \varkappa\pi$$

zu ersetzen, so daß sie mit Ausnahme der reellen Achse von 1 bis ∞ mit wachsendem n ins Unendliche rücken."

Beweis:

Wir bezeichnen mit $F(A_\nu(x))$ die Funktion $\frac{1}{1-x}$, wenn x im Innern des Bereiches $A_\nu(x)$ liegt.

a) $$F(A_0(x)) = \sum_0^\infty{}^{\nu} x^\nu.$$

Der Bereich $A_0(x)$ wird bestimmt durch die Ungleichung

b) $$|x| < 1.$$

Die Summe der ν ersten Glieder in der Reihendarstellung ist

c) $$\sigma_\nu(x) \equiv \sigma_{\nu,0}(x) = \frac{1-x^\nu}{1-x}.$$

Nach einmaliger Anwendung der exponentiellen Summation folgt hieraus:

$$a^1) \quad F(A_1(x)) = \lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_0^\infty{}^\nu \frac{t^\nu}{\nu!} \sigma_{\nu,0}(x) = \lim_{t=\infty} \frac{1}{1-x}(1-e^{-t(1-x)}).$$

Der Bereich $A_1(x)$ wird bestimmt durch die Ungleichung

$$b^1) \quad \Re(x) < 1.$$

Wenn man den Grenzwert $F(A_1(x))$ als unendliche Reihe darstellt, indem in Formel 21), § 1 direkt $t = \mu$ setzt, so folgt

$$F(A_1(x)) = \sum_0^\infty{}^\mu e^{-\mu+1} \sum_0^\infty{}^\nu \frac{(\mu+1)^\nu}{\nu!} \sigma_{\nu,0}(x) - e^{-\mu} \sum_0^\infty{}^\nu \frac{\mu^\nu}{\nu!} \sigma_{\nu,0}(x)$$

$$= \sum_0^\infty{}^\mu \left\{ \frac{1}{1-x}(1-e^{\mu+1(1-x)}) - \frac{1}{1-x}(1-e^{\mu(1-x)}) \right\}.$$

Wenn man ferner mit $\sigma_{\nu,1}(x)$ analog zu Formel c) die Summe der ν ersten Glieder bezeichnet, so ist

$$c^1) \quad \sigma_{\nu,1}(x) = e^{-\nu} \sum_0^\infty{}^{\nu_1} \frac{\nu^{\nu_1}}{\nu_1!} \sigma_{\nu,0}(x) = \frac{1}{1-x}(1-e^{\nu(x-1)}),$$

ferner definiert man

$$d^1) \quad \varphi_0(x-1) = x-1.$$

Nach abermaliger Anwendung der exponentiellen Summation wird

$$F(A_2(x)) = \lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_0^\infty{}^\nu \frac{t^\nu}{\nu!} \sigma_{\nu,1}(x)$$

$$a^2) \quad = \lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_0^\infty{}^\nu \frac{t^\nu}{\nu!} \cdot e^{-\nu} \sum_0^\infty{}^{\nu_1} \frac{\nu^{\nu_1}}{\nu_1!} \sigma_{\nu_1,0}(x)$$

$$= \lim_{t=\infty} \frac{e^{-t}}{1-x} \sum_0^\infty{}^\nu \frac{t^\nu}{\nu!}(1-e^{\nu(x-1)})$$

$$= \lim_{t=\infty} \frac{1}{1-x}(1-e^{t(e^{x-1}-1)}) = \lim_{t=\infty} \frac{1}{1-x}(1-e^{t(\varphi_1(x-1)-1)}).$$

Der Bereich $A_2(x)$ wird bestimmt durch die Ungleichung

b²) $$\Re(\varphi_1(x-1)) < 1,$$

wenn

d²) $$\varphi_1(x-1) = e^{x-1}$$

gesetzt wird. Aus der Reihendarstellung von $F(A_2(x))$ folgt wieder

c²) $$\sigma_{\nu,2}(x) = e^{-\nu}\sum_0^\infty{}_{\nu_1}\frac{\nu^{\nu_1}}{\nu_1!}\sigma_{\nu_1,1}(x) = \frac{1}{1-x}(1-e^{\nu(\varphi_1(x-1)-1)}).$$

Allgemein wird nach $\varkappa$ maliger Anwendung der exponentiellen Summation für $\varkappa > 2$

a$^\varkappa$) $$F(A_\varkappa(x)) = \lim_{t=\infty} e^{-t}\sum_0^\infty{}^{\nu}\frac{t^\nu}{\nu!}\sigma_{\nu,\,\varkappa-1}(x) = \lim_{t=\infty}\frac{1}{1-x}(1-e^{t(\varphi_{\varkappa-1}(x)-1)}).$$

Der Bereich $A_\varkappa(x)$ wird bestimmt durch die Ungleichung

b$_\varkappa$) $$\Re(\varphi_{\varkappa-1}(x-1)) < 1.$$

Dabei gelten für $\sigma_{\nu,\,\varkappa}(x)$ und $\varphi_\varkappa(x-1)$, wenn $\varkappa > 1$ die Rekursionsformeln

c$^\varkappa$) $$\sigma_{\nu,\,\varkappa}(x) = e^{-\nu}\sum_0^\infty{}_{\nu_1}\frac{\nu^{\nu_1}}{\nu_1!}\sigma_{\nu_1,\,\varkappa-1}(x)$$

und

d$^\varkappa$) $$\varphi_\varkappa(x-1) = e^{\varphi_{\varkappa-1}(x-1)-1},$$

wie durch vollständige Induktion gefunden wird.

Es werden nun die Funktionen $\xi_\varkappa(\xi,\eta)$ und $\eta_\varkappa(\xi,\eta)$ oder kurz $\xi_\varkappa$, $\eta_\varkappa$ durch folgende Rekursionsformeln definiert:

7) $$\begin{cases}\xi_\varkappa = e^{\xi_{\varkappa-1}-1}\cos\eta_{\varkappa-1}, & \xi_0 = \xi\\ \eta_\varkappa = e^{\xi_{\varkappa-1}-1}\sin\eta_{\varkappa-1}, & \eta_0 = \eta,\end{cases}$$

dann läßt sich die Ungleichung, durch welche der Bereich $A_{\varkappa+1}(x)$ bestimmt wird, nämlich

$$\Re(\varphi_\varkappa(x-1)) < 1$$

auch in die Form setzen:

8) $$\xi_\varkappa(\xi,\ \eta) < 1.$$

Es ist nämlich nach Definition d$^\varkappa$)

$$\varphi_\varkappa(x-1) = e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{x-1}-1}}}-1}-1},$$

wobei auf der rechten Seite $\varkappa - 1$ mal der Exponent e stehen soll. Dann ist aber

9) $$\begin{cases} \Re\,\varphi_\varkappa(x-1) = \xi_\varkappa \\ \Im\,\varphi_\varkappa(x-1) = \eta_\varkappa. \end{cases}$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich wieder durch vollständige Induktion, für $\varkappa = 1$ folgt direkt

$$\xi_1 = e^{\xi-1}\cos\eta = \Re(e^{x-1}) = \Re(\varphi_1(x-1))$$
$$\eta_1 = e^{\xi-1}\sin\eta = \Im(e^{x-1}) = \Im(\varphi_1(x-1)).$$

Angenommen, Gleichung 9) gelte für alle Indizes $< \varkappa$, dann ist nach Definition d$^\varkappa$)

$$\begin{aligned} \varphi_{\varkappa+1}(x-1) &= e^{\varphi_\varkappa(x-1)-1} \\ \Re(\varphi_{\varkappa+1}(x-1)) &= \Re(e^{\xi_\varkappa-1+\eta_\varkappa i}) \\ &= e^{\xi_\varkappa-1}\cos\eta_\varkappa \\ \Im(\varphi_{\varkappa+1}(x-1)) &= \Im\, e^{\xi_\varkappa-1+\eta_\varkappa i} \\ &= e^{\xi_\varkappa-1}\sin\eta_\varkappa, \end{aligned}$$

also gilt Formel 9) allgemein.

Aus den Gleichungen 7) folgt sofort, daß ein Punkt $x = \xi + \eta i$, der der Ungleichung $\xi_\varkappa(\xi,\ \eta) < 1$ genügt, a fortiori der Ungleichung $\xi_{\varkappa+1}(\xi,\ \eta) < 1$ genügen muß. Die Bereiche $A_\varkappa(x)$ besitzen also die Eigenschaft, sich gegenseitig zu umschließen. Da die Funktion $\xi_1(\xi,\ \eta)$ in Bezug auf η die Periode 2π besitzt, brauchen wir nur diejenigen Werte ξ und η in Betracht zu ziehen, die in dem Streifen $0 < \eta \leq 2\pi$ liegen. Für alle Streifen $2\varkappa\pi \leq \eta < (2\varkappa+1)\pi$ gilt dann dasselbe.

Die Ungleichung

$$\xi_1(\xi, \eta) < 1$$

ist erfüllt.

Für alle $\xi < 1$ und alle η.

Für alle $\frac{\pi}{2} < \eta < \frac{3\pi}{2}$ und alle ξ.

Für alle ξ und alle η, die außerhalb, d. h. auf der die Gerade $\eta = 0$ nicht enthaltenden Seite der Kurve

10) $$e^{\xi-1} \cos \eta = 1$$

liegen.

Hingegen liegen die Werte von ξ und η, für welche $\xi_1(\xi, \eta) > 1$ ist, innerhalb des von der Kurve $e^{\xi-1} \cos \eta = 1$ einerseits, von den Geraden $\eta = 2\pi$ oder $\eta = 0$ andererseits begrenzten Gebietes.

Ist $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$, so ist Gleichung 10) die Gleichung einer konkav gegen die ΞAchse gelegenen Kurve, die im Punkte $\xi = 1$, $\eta = 0$ eine vertikale Tangente hat und die Gerade $\eta = \frac{\pi}{2}$ zur Asymptote (siehe Fig. 6).

Für

$$\frac{3\pi}{2} \leqq \eta \leqq 2\pi$$

ist:

$$e^{\xi-1} \cos \eta = e^{\xi-1} \sin \eta',$$

wo wieder

$$0 \leq \eta' \leq \frac{\pi}{2}$$

ist. Diese Kurve ist das Spiegelbild der Kurve

$$e^{\xi-1} \cos \eta = 1 \quad \text{für} \quad 0 \leqq \eta \leqq \frac{\pi}{2},$$

wenn wir die Gerade $\eta = 0$ durch die Gerade $\eta = 2\pi$ ersetzen. Sie hat also die Gerade $\eta = \frac{3\pi}{2}$ zur Asymptote und im Punkte $\xi = 1$, $\eta = 2\pi$ eine vertikale Tangente.

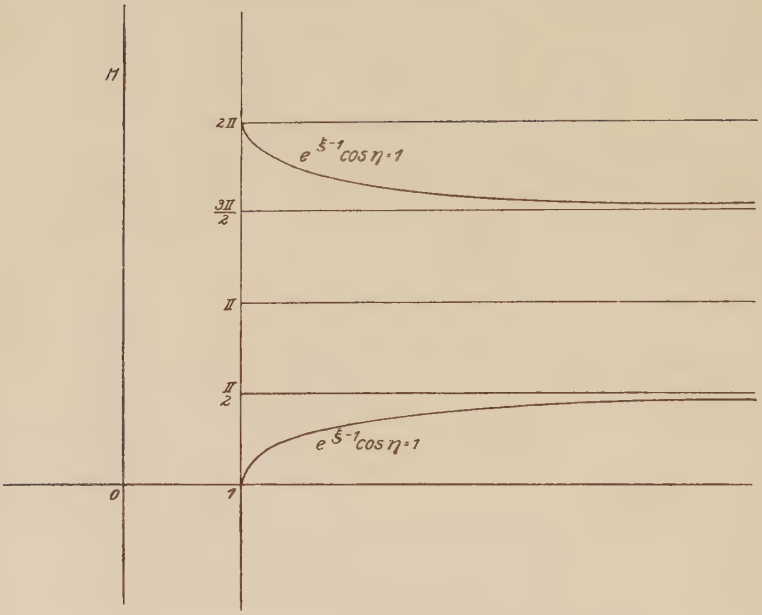

Fig. 6.

Da sich der Streifen

$$\frac{3\pi}{2} \leqq \eta \leqq 2\pi$$

spiegelbildlich zu dem Streifen

$$0 \leqq \eta \leqq \frac{\pi}{2}$$

verhält, brauchen wir nur die Punkte innerhalb dieses letzteren zu untersuchen.

Es wird nun gezeigt, daß die Bereiche, innerhalb deren diejenigen Werte von ξ und η liegen müssen, für welche $\xi_\nu(\xi, \eta) > 1$ ist, d. h. die von den Kurven $\xi_\nu = 1$ einerseits, von der Geraden $\eta = 0$ andererseits begrenzten Ebenenstücke mit wachsendem ν abnehmen und sich schließlich auf die Gerade $\eta = 0$ reduzieren. Zum Beweise dieser Behauptung

ist ein eingehenderes Studium der Kurven $\xi_\nu(\xi, \eta) = 1$ erforderlich.

Denselben sind folgende Eigenschaften gemeinsam:

I. Für $\nu > 1$ besitzen sie sämtlich die Asymptote $\eta = 0$.

II. Im Punkte $\xi = 1$, $\eta = 0$ besitzen sie sämtlich eine vertikale Tangente.

Zu I.

Ist die Gleichung einer Kurve gegeben durch

$$f(x, y) = 0,$$

so ist

$$y = gx + h$$

die Gleichung ihrer Asymptote[1]), wenn die Grenzwerte

$$g = \lim_{x=\infty} \frac{dy}{dx} = \lim_{x=\infty} -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \text{und} \quad h = \lim_{x=\infty} \frac{g - \frac{y}{x}}{-\frac{1}{x}}$$

existierten.

Betrachtet man $\xi_\nu = e^{\xi_{\nu-1}-1} \cos \eta_{\nu-1}$ als Funktion der Variabeln $\xi_{\nu-1}$ und $\eta_{\nu-1}$, so ist

11) $$\xi_\nu - 1 = e^{\xi_{\nu-1}-1} \cos \eta_{\nu-1} - 1 = 0$$

die Gleichung einer Kurve. Für den Richtungskoeffizienten

$$\frac{d\eta_{\nu-1}}{d\xi_{\nu-1}}$$

derselben findet man durch Differentiation:

12) $$\frac{d\eta_{\nu-1}}{d\xi_{\nu-1}} = -\frac{\frac{\partial \xi_\nu}{\partial \xi_{\nu-1}}}{\frac{\partial \xi_\nu}{\partial \eta_{\nu-1}}} = \operatorname{cotg} \eta_{\nu-1} = \frac{e^{1-\xi_{\nu-1}}}{\sqrt{1 - e^{2(1-\xi_{\nu-1})}}}.$$

---

[1]) Siehe Serret, Lehrbuch der Differential- und Integralrechung I, p. 287.

Da wegen Gleichung 11) $\cos \eta_{\nu-1} = e^{1-\xi_{\nu-1}}$ wird.
Also wird

$$g = \lim_{\xi_{\nu-1}=\infty} \frac{d\,\eta_{\nu-1}}{d\,\xi_{\nu-1}} = 0$$

und

$$h = \lim_{\xi_{\nu-1}=\infty} \eta_{\nu-1} = \lim_{\xi_{\nu-1}=\infty} \operatorname{arc\,cos}(e^{1-\xi_{\nu-1}})$$
$$= \operatorname{arc\,cos}(0) = \frac{\pi}{2},$$

wenn man sich auf die Werte

$$0 \leqq \eta_{\nu-1} \leqq \frac{\pi}{2}$$

beschränkt.

Die Gleichung der Asymptote an die Kurve $\xi_\nu - 1 = 0$ ist also gegeben durch

13) $$\eta_{\nu-1} = \frac{\pi}{2}.$$

Soll aber $\xi_{\nu-1}$ ins Unendliche wachsen, so folgt aus den Definitionsgleichungen 7), daß auch $\xi_0 = \xi$ unendlich werden muß.

Es besitzt also nach Gleichung 13) die Kurve

$$\xi_1 - 1 = e^{\xi-1} \cos \eta - 1 = 0$$

die Asymptote

$$\eta = \frac{\pi}{2},$$

die Kurve

$$\xi_2 - 1 = e^{\xi_1-1} \cos \eta_1 - 1 = 0$$

die Asymptote

$$\eta_1 = e^{\xi-1} \sin \eta = \frac{\pi}{2}.$$

Als Funktion von ξ und η betrachtet, besitzt demnach die Kurve $\xi_2 - 1 = 0$ die asymptotische Linie

$$e^{\xi-1} \sin \eta = \frac{\pi}{2}.$$

Wie sich auf ähnlichem Wege zeigen läßt, wird aber die Asymptote der Kurve

$$e^{\xi-1}\sin\eta-\frac{\pi}{2}=0$$

gegeben durch die Gleichung

$$\eta=0.$$

Also ist die Gerade $\eta=0$ auch die Asymptote der Kurve $\xi_2-1=0$.

Da aber alle Kurven $\xi_\nu-1=0$ sich gegenseitig umschließen und η auf das Intervall

$$0\leq\eta\leq\frac{\pi}{2}$$

beschränkt bleibt, derart, daß alle diese Kurven oberhalb der Geraden $\eta=0$ verlaufen müssen, besitzen sie sämtlich die Asymptote $\eta=0$.

Zu II.

Es möge mit

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_\nu$$

der Richtungskoeffizient der Kurve $\xi_\nu(\xi,\ \eta)-1=0$ bezeichnet werden, dann ist nach Formel 12)

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_1=\operatorname{cotg}\eta=\infty\quad\text{für}\quad\eta=0,$$

ferner wird

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_2=\frac{\dfrac{\partial\xi_2}{\partial\xi}}{\dfrac{\partial\xi_2}{\partial\eta}}=\frac{\dfrac{\partial\xi_2}{\partial\xi_1}\dfrac{\partial\xi_1}{\partial\xi}+\dfrac{\partial\xi_2}{\partial\eta_1}\dfrac{\partial\eta_1}{\partial\xi}}{\dfrac{\partial\xi_2}{\partial\xi_1}\dfrac{\partial\xi_1}{\partial\eta}+\dfrac{\partial\xi_2}{\partial\eta_1}\dfrac{\partial\eta_1}{\partial\eta}}$$

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_2=\frac{e^{\xi_1-1}\cos\eta_1\cdot e^{\xi-1}\cos\eta-e^{\xi_1-1}\sin\eta_1\cdot e^{\xi-1}\sin\eta}{e^{\xi_1-1}\cos\eta_1\,e^{\xi-1}\sin\eta+e^{\xi_1-1}\sin\eta_1\,e^{\xi-1}\cos\eta}=\operatorname{cotg}(\eta_1+\eta)$$

$$=\infty\ \text{für}\ \eta=0,$$

denn aus den Formeln 7) folgt, daß für $\eta = 0$ auch $\eta_1 = \eta_2 \ldots$ $\eta_\nu = 0$ und $\xi = \xi_1 = \xi_2 \ldots \xi_\nu = 1$ wird.

Durch vollständige Induktion wird bewiesen, daß

$$13) \quad \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_\nu = \operatorname{cotg}(\eta_{\nu-1}+\eta_{\nu-2}+\cdots+\eta_1+\eta) = \infty \quad \text{für} \quad \left.\begin{matrix}\eta = 0\\ \xi = 1\end{matrix}\right\}$$

werden muß. Die Kurven $\xi_\nu - 1 = 0$ besitzen also in der Tat im Punkte $\xi = 1$, $\eta = 0$ vertikale Tangenten.

Die Funktionen $\xi_\nu(\xi, \eta)$ haben in Bezug auf $\eta_{\nu-1}$ die Periode 2π. Wir brauchen also nur die Werte $0 \leq \eta_{\nu-1} < 2\pi$ zu betrachten, da alle modulo 2π kongruenten $\eta_{\nu-1}$ dieselben ξ_ν liefern.

Es wird nun folgender Satz bewiesen: „Ist

$$1 < \xi_0 < \infty \quad \text{und} \quad 0 < \eta_0 \leq \frac{\pi}{2},$$

so ist es nicht möglich, daß für alle $\nu > 1$ alle Funktionen $\xi_\nu(\xi_0, \eta_0)$ größer als 1 sind. Es gibt also für jedes solche Wertepaar ξ_0, η_0 einen Wert n derart, daß der Ausdruck

$$\xi_n(\xi_0, \eta_0) < 1$$

und a fortiori für $\varrho \geq 1$

$$\xi_{n+\varrho}(\xi_0, \eta_0) < 1$$

wird."

Der Beweis ergibt sich indirekt:

Angenommen, es wäre

$$\xi_\nu(\xi_0, \eta_0) > 1$$

für alle ν.

Es gibt aber immer einen bestimmten Wert von η, welcher dem Intervalle

$$0 < \eta \leq \frac{\pi}{2}$$

angehört und die Gleichung der Kurve

$$\xi_\nu(\xi_0, \eta) = 1$$

befriedigt. Derselbe möge mit $\eta^{(\nu)}$ bezeichnet werden. Da die Kurve $\xi_{\nu+1}(\xi, \eta) = 1$ von der Kurve $\xi_\nu(\xi, \eta) = 1$ umschlossen wird, bilden die zu ein und demselben ξ_0 gehörigen Werte $\eta^{(\nu)}$ eine monoton absteigende Folge. Sie müssen also einen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwert H besitzen, von der Eigenschaft, daß

$$0 < \eta_0 \leqq H \leqq \frac{\pi}{2}$$

ist. Setzt man zur Abkürzung

$$\xi_\nu(\xi_0, H) = \xi'_\nu$$
$$\eta_\nu(\xi_0, H) = \eta'_\nu,$$

so ist infolge der Definition von H

$$\xi'_\nu > 1$$

für jedes endliche ν und

$$\lim_{\nu=\infty} \xi'_\nu = 1.$$

Aus der letzten Gleichung folgt aber in Verbindung mit Formel 7)

$$\lim_{\nu=\infty} e^{\xi'_{\nu-1}-1^{-1}} \cos \eta'_{\nu-1} = 1,$$

also auch

$$\lim_{\nu=\infty} \cos \eta'_{\nu-1} = 1 = \lim_{\nu=\infty} \cos \eta'_\nu = 1$$

und wegen

$$0 \leqq \eta'_\nu < 2\pi$$
$$\lim_{\nu=\infty} \eta'_\nu = 0.$$

Nach Formel 7) ist dann aber auch

$$\lim_{\nu=\infty} e^{\xi'_{\nu-1}-1^{-1}} \sin \eta'_{\nu-1} = 0.$$

Nun läßt sich n so groß annehmen, daß

$$1 - \xi'_{n-1} < \delta \quad \text{und} \quad e^{\xi'_{n-1}-1^{-1}} \sin \eta'_{n-1} < \varepsilon$$

wird, wobei δ und ε beliebig kleine Zahlen sind. Dann wird

$$\sin \eta'_{n-1} < \varepsilon \cdot e^{\delta}$$

und wegen

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

kann n so groß genommen werden, daß

$$\eta'_{n-1} < \varepsilon$$

wird.

Daraus folgt

$$e^{\xi'_{n-2}-1} \sin \eta'_{n-2} < \varepsilon$$

und hieraus wegen

$$\xi'_{n-2}{}^{-1} \geqq \xi'_{n-1}{}^{-1}:$$
$$\eta'_{n-1} < \varepsilon.$$

So rückwärtsschließend gelangt man endlich zu der Ungleichung

$$\eta'_0 = H < \varepsilon$$

und da ε beliebig verkleinert werden kann, H aber ein fester Wert ist, ergibt sich schließlich

$$H = 0,$$

was der Voraussetzung widerspricht. Es gibt also außer den Punkten der reellen Achse von 1 bis ∞ keinen Punkt, der außerhalb aller Bereiche $\xi_\nu < 1$ (oder $A_\nu(x)$) liegt. Dasselbe gilt für die Punkte der Halbgeraden

$$\xi > 1, \ \eta = 2\varkappa\pi \ (\varkappa = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\nu \ldots).$$

Für jeden Punkt

$$x = \xi_0 + \eta_0 i \quad \xi > 1, \ 2\varkappa\pi < \eta < 2\varkappa\pi + \frac{\pi}{2}$$
$$(\varkappa = 0, \pm 1, \pm \ldots, \nu \ldots)$$

gibt es also einen zugehörigen endlichen Wert n derart, daß

$$\xi_n(\xi_0, \eta_0) < 1$$

wird.

Daraus folgt nach Formel 9)

$$\lim_{n=\infty} \Re\,(\varphi_n(x-1)) < 1,$$

außer auf den Halbgeraden $\xi > 1$, $\eta = 2\varkappa\pi$ und somit ist

$$14)\quad \lim_{t=\infty} \frac{1}{1-x}\,(1 - e^{-t(\varphi_n(x-1)-1)}) = F(A_n(x)) = \frac{1}{1-x}$$

in der ganzen Ebene mit Ausnahme einer beliebig kleinen Umgebung der genannten Halbgeraden, wenn n groß genug ist. Will man diesen Ausdruck in Form eines iterierten verallgemeinerten Grenzwertes darstellen, so folgt aus dem Bildungsgesetz, wenn man die Werte der $\sigma_{\nu,\varkappa}(x)$ mit Hilfe der Rekursionsformel $c^{\varkappa}$) berechnet:

$$15)\ \lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_0^\infty{}^{\nu_1} \sum_0^\infty{}^{\nu_2} \cdots \sum_0^\infty{}^{\nu_n} e^{-(\nu_1+\nu_2\cdots+\nu_n)} \frac{t^{\nu_1}}{\nu_1!} \frac{\nu_2^{\nu_1}}{\nu_2!} \cdots \frac{\nu_n^{\nu_n-1}}{\nu_n!}\, \sigma_{\nu_n,0}(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Analog wie bei der durch einmalige Anwendung der exponentiellen Summation erzielten Darstellung, vgl. Formel 5) dieses Paragraphen und Formel 14) § 1, ergibt sich hieraus für eine beliebige Funktion $f(x)$ derselbe Ausdruck, wenn man nur $\sigma_{\nu_n,0}(x)$ durch

$$s_{\nu_n,0}(x) = \sum_0^{\nu_n-1}{}^{\lambda} a_\lambda x^\lambda$$

ersetzt und zwar gilt diese Darstellung für hinreichend große n im Innern des ganzen Mittag-Lefflerschen Zentralsterns von (fx) mit Ausnahme einer beliebig kleinen Umgebung, der zu den Strahlen desselben im Abstande $2\varkappa\pi$ parallelen Halbgeraden. Ersetzt man in der Funktion $\varphi_n(x-1)$ die Variable $x-1$ durch $\frac{x-1}{\alpha}$, wo α reell positiv ist, so wird

$$\lim_{n=\infty} \Re\,\varphi_n\left(\frac{x-1}{\alpha}\right) < 1,$$

außer auf den Halbgeraden

$$\xi > 1,\ \eta = 2\alpha\varkappa\pi.$$

Führt man nun die Bezeichnung ein:

$$\varphi_n\left(\frac{x-1}{n}\right) = \psi_n(x-1),$$

so besitzen zwar die Bereiche $A'_{n+1}(x)$, die durch die Ungleichungen

$$\Re(\psi_n(x-1)) < 1$$

definiert werden, nicht mehr die Eigenschaft, sich gegenseitig zu umschließen. Es wird aber für hinreichend große n, außer in der Umgebung der Halbgeraden

$$\xi > 1,\ \eta = 2n\varkappa\pi:$$
$$\Re(\psi_n(x-1)) < 1.$$

Mit wachsendem n nähert sich also jetzt der Bereich $A'_{n+1}(x)$ in der Tat dem Innern des Zentralsternes von $\frac{1}{1-x}$, da die fraglichen Halbgeraden, in deren Umgebung die Darstellung nicht gilt, mit Ausnahme der reellen Achse von 1 bis ∞ mit wachsendem n ins Unendliche rücken.

Es ist nach Gleichung

$$\frac{1}{1-x}\left(1-e^{t((\psi_n(x-1)-1)}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\frac{1-x}{n}}\left(1-e^{t\left(\varphi_n\left(\frac{x-1}{n}\right)-1\right)}\right)$$
$$= \frac{1}{n}\frac{1}{\frac{1-x+n-1}{n}}\left(1-e^{t\left(\varphi_n\left(\frac{x+n-1}{n}-1\right)-1\right)}\right)$$

ersetzt man also in Formel 15) x durch $\frac{x+n-1}{n} = x'$ und σ durch s, so wird der Ausdruck

$$16)\ \lim_{t=\infty} e^{-t}\sum_0^\infty{}^{\nu_1}\sum_0^\infty{}^{\nu_2}\cdots\sum_0^\infty{}^{\nu_n} e^{-(\nu_1+\nu_2\cdots+\nu_n)}\frac{t^{\nu_1}}{\nu_1!}\frac{\nu_2^{\nu_1}}{\nu_2!}\cdots\frac{\nu_n^{n-1}}{\nu_n!}s_{\nu_n,0}(x')$$

die Funktion $f(x)$ in einem Gebiete darstellen, welches sich mit wachsendem n dem Mittag-Lefflerschen Zentralstern von $f(x)$ beliebig nähert.

§ 4.

Wir lassen nun die Voraussetzung fallen, daß die zu summierende Reihe einen von Null verschiedenen Konvergenzradius besitze. Wenn aber trotzdem der verallgemeinerte Grenzwert existiert, so nennen wir die Reihe summabel. Eine konvergente Reihe

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu$$

ist immer summabel, braucht aber, wie Hardy[1]) an Beispielen nachgewiesen hat, nicht absolut summabel zu sein, d. h. es braucht das Integral

$$\int_0^\infty \left| e^{-t}\left(\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu \frac{x^\nu t^\nu}{\nu!}\right)\right| dt$$

nicht zu existieren.

Ferner behauptet Borel: „Ist die Reihe

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu$$

summabel, so gilt dasselbe für die Reihe

$$\sum_\varkappa^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu.“$$

Dieser für konvergente Reihen richtige Satz braucht aber bei divergenten nicht mehr zu gelten, während, wie gleichfalls von Hardy gezeigt wird, die Umkehrung desselben immer besteht: „Aus der Summabilität von

$$\sum_\varkappa^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu$$

---

[1]) „Researches in the theory of divergent series and integrals“, 1903, p. 27.

folgt diejenige von

$$\sum_{\varkappa-1}^{\infty\nu} a_\nu x^\nu.“$$

Der Beweis dieses Satzes, der bei Hardy mit Hilfe der Integraldarstellung (siehe Einleitung u. a.) gewonnen wird, ergibt sich auch aus der Mittelwertdarstellung.

Es sollen zur Abkürzung folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

1) $$\sum_{0}^{\infty\nu} a_\nu x^\nu \sum_{\nu+1}^{\infty\lambda} \frac{t^\lambda}{\lambda!} = E(t,\ x)$$

2) $$\sum_{0}^{\infty\nu} a_\nu x^\nu \frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!} = \varepsilon(t,\ x)$$

3) $$1 + \sum_{1}^{\infty\lambda} \frac{t^\lambda}{(\nu+1)(\nu+2)\ \ldots\ \nu+\lambda} = e_\nu(t).$$

Daraus folgt

4) $$E(t,\ x) = \sum_{0}^{\infty\nu} a_\nu x^\nu \frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!} \cdot e_{\nu+1}(t).$$

Ist die Reihe

$$\sum_{0}^{\infty\nu} a_\nu x^\nu$$

summabel, so existiert $\lim\limits_{t=\infty} e^{-t} E(t,\ x)$. Ersetzt man in $E(t,\ x)$, $a_\nu x^\nu$ durch $a_{\nu+\varkappa} x^{\nu+\varkappa}$, so erhält man den Ausdruck

$$\lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_{0}^{\infty\nu} a_{\nu+\varkappa} x^{\nu+\varkappa} \sum_{\nu+1}^{\infty\lambda} \frac{t^\lambda}{\lambda!} = \lim_{t=\infty} e^{-t} \frac{d^\varkappa}{dt^\varkappa} E(t,\ x) - \sum_{0}^{\varkappa-1\nu} a_\nu x^\nu.$$

Die linke Seite ist aber nichts anderes als der verallgemeinerte Grenzwert der Reihe

$$\sum_{\varkappa}^{\infty\nu} a_\nu x^\nu.$$

Der Hardysche Satz läßt sich also auch dahin formulieren:

Die Existenz von

$$\lim_{t=\infty} e^{-t} \frac{d^\varkappa}{dt^\varkappa} E(t, \varkappa)$$

zieht diejenige von

$$\lim_{t=\infty} e^{-t} \frac{d^\lambda}{dt^\lambda} E(t, x)$$

für $\lambda < \varkappa$ nach sich.

Der Beweis kann mit Hilfe eines Satzes aus der Abhandlung des Herrn Pringsheim[1]) über den zweiten Mittelwertsatz für endliche Summen und Integrale geführt werden. Derselbe lautet: „Ist

a) $$S_n = \sum_0^n{}^\nu u_\nu v_\nu$$

und ist die Folge der u_ν eine monoton zunehmende Folge gleich bezeichneter, reeller Zahlen $|u_\nu| > |u_{\nu+1}|$, so ist

b) $$S_n = u_0 \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{M}} \sum_0^\nu{}^\lambda v_\lambda,$$

wobei

$$\underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{M}} \sum_0^\nu{}^\lambda v_\lambda$$

einen Mittelwert aus den Summen $\sum_0^\nu{}^\lambda v_\lambda$ für $\lambda = 0, 1, \ldots, n$ bedeutet.“ Diese Relation gilt für jedes n, steht aber fest, daß

$$\lim_{n=\infty} S_n \sum_0^\infty{}^\nu u_\nu v_\nu = S$$

existiert, so darf in derselben n durch ∞ ersetzt werden.

Die Voraussetzung der Existenz von

$$\lim_{t=\infty} e^{-t} \frac{d^\varkappa}{dt^\varkappa} E(t, x)$$

---

[1]) „Über den sog. zweiten Mittelwertsatz für endliche Summen und Integrale.“ Münchener Sitzungsberichte 1900, p. 215, Formel E (1).

besagt nichts anderes als: der Ausdruck

$$e^{-t}\sum_{0}^{\infty\nu} a_{\nu+\varkappa}x^{\nu+\varkappa}\frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!}e_{\nu+1}(t)$$

ist bestimmt und endlich für alle $t>\tau$.

Wir setzen in Formel b)

$$u_\nu = e_{\nu+1}(t)$$
$$v_\nu = e^{-t}a_{\nu+\varkappa}x^{\nu+\varkappa}\frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!}.$$

Dann ist

$$u_0 = 1+\frac{e^t-1}{t}.$$

Also

$$e^{-t}\sum_{0}^{n\nu} a_{\nu+\varkappa}x^{\nu+\varkappa}\frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!}e_{\nu+1}(t)$$

5)

$$=\left(1+\frac{e^t-1}{t}\right)\underset{\lambda=0}{\overset{\lambda=n}{M}}e^{-t}\sum_{0}^{\lambda\nu} a_{\nu+\varkappa}x^{\nu+\varkappa}\frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist für jedes $n>N$ und $t>\tau$ bestimmt und endlich, auf der rechten wächst der erste Faktor mit t ins Unendliche, also muß der zweite mit wachsendem t gegen Null konvergieren.

Da aber n unendlich viele Werte annehmen kann, so muß es unendlich viele Zahlen λ_n geben, derart, daß

$$\lim_{t=\infty} e^{-t}\sum_{0}^{\lambda_n\nu} a_{\nu+\varkappa}x^{\nu+\varkappa}\frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!}=0,$$

die λ_n müssen aber die Häufungsstelle unendlich haben.

Wäre dies nämlich nicht der Fall, so müßten sie eine Häufungsstelle im Endlichen besitzen, d. h. es müßten unendlich viele aneinander gleich sein. Dann wären aber, wenn n alle Werte durchläuft, von den linken Seiten der Gleichung 5) unendlich viele aneinander gleich. Es müßte also entweder die Reihe

$$\sum_{0}^{\infty\nu} a_{\nu+\varkappa}x^{\nu+\varkappa}\frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!}e_{\nu+1}(t),$$

welche für endliche beliebig große t konvergiert, bei einem gewissen n' abbrechen, dann wäre also

$$\sum_{0}^{n'\nu} a_{\nu+\varkappa} x^{\nu+\varkappa}$$

ein Polynom; dasselbe ist sicher summabel und behält diese Eigenschaft bei, wenn man eine endliche Anzahl von Gliedern

$$\sum_{\lambda}^{\varkappa-1\nu} a_\nu x^\nu$$

hinzufügt. Ist dies nicht der Fall, so lassen sich für ein bestimmtes, beliebig großes t von einem bestimmten n_0 an die Glieder in der Summe

$$\sum_{0}^{\infty\nu} a_{\nu+\varkappa} x^{\nu+\varkappa} \frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!} e_{\nu+1}(t)$$

so in Gruppen zusammenfassen, daß jedes derselben für sich gleich Null ist, also

$$\frac{d^\varkappa}{dt^\varkappa} E(t, x) = \sum_{0}^{n_0\nu} a_{\nu+\varkappa} x^{\nu+\varkappa} \frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!} e_{\nu+1}(t)$$

$$+ \sum_{0}^{\infty\lambda} \left\{ \sum_{n_\lambda+1}^{n_{\lambda+1}\nu} a_{\nu+\varkappa} \cdot x^{\nu+\varkappa} \frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!} e_{\nu+1}(t) \right\} + \sum_{0}^{\varkappa-1\nu} a_\nu x^\nu .$$

Aus der vorausgesetzten Konvergenz von

$$e^{-t} \sum_{0}^{\infty\nu} a_{\nu+\varkappa} x^{\nu+\varkappa} \frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!} e_{\nu+1}(t)$$

folgt aber, daß die einzelnen Glieder dieser Gruppen gegen Null konvergieren müssen, derart, daß für jedes $m > m'$

$$\left| e^{-t} \sum_{m}^{\infty\nu} a_{\nu+\varkappa} x^{\nu+\varkappa} \frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!} e_{\nu+1}(t) \right| < \delta_m ,$$

wobei

$$\lim_{m=\infty} \delta_m = 0 .$$

Dann ist also

$$e^{-t}\left|\sum_0^\infty{}^{\nu} a_{\nu+\varkappa} x^{\nu+\varkappa} \frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!} e_{\nu+1}(t)\right| < e^{-t}\left|\sum_0^{n_0}{}^{\nu} a_{\nu+\varkappa} x^{\nu+\varkappa} \frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!}\right| e_{\nu+1}(t)\Big| + \delta_m.$$

Da δ_m unbegrenzt verkleinert werden kann, die linke Seite aber als konvergente Reihe einen bestimmten Wert besitzt, muß geradezu

$$\frac{d^\varkappa}{dt^\varkappa} E(t,x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} a_{\nu+\varkappa} x^{\nu+\varkappa} \frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!} e_{\nu+1}(t) = \sum_0^{n_0}{}^{\nu} a_{\nu+\varkappa} x^{\nu+\varkappa} \frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!} e_{\nu+1}(t) + \sum_0^{\varkappa-1}{}^{\nu} a_\nu x^\nu$$

sein.

Damit ist dieser Fall, auf den vorhin betrachteten zurückgeführt.

Soll die Reihe $\sum_\varkappa^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu$ wirklich eine divergente sein (natürlich kann es sich nur um uneigentliche Divergenz handeln, da bei eigentlicher auch der verallgemeinerte Grenzwert ∞ werden muß), so müssen, wie behauptet, die Zahlen λ_n die Häufungsstelle ∞ haben. Es wird also

$$\lim_{t=\infty} e^{-t} \lim_{n=\infty} \sum_0^{\lambda_n}{}^{\nu} a_{\nu+\varkappa} x^{\nu+\varkappa} \frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!} = \lim_{t=\infty} \lim_{n=\infty} \sum_0^{\lambda_n}{}^{\nu} a_{\nu+\varkappa} x^{\nu+\varkappa} \left(e^{-t} \frac{t^n}{n!}\right) = 0.$$

In dieser Summe hat aber jedes einzelne Glied den Grenzwert Null. Es gilt also auch, wenn

$$0 < \lambda < \lambda_n - \lambda_{n-1}$$

ist, die Gleichung

$$\lim_{t=\infty} e^{-t} \lim_{n=\infty} \sum_0^{\lambda_{n-1}+\lambda}{}^{\nu} a_{\nu+\varkappa} x^{\nu+\varkappa} \frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!} = 0,$$

mit anderen Worten: es ist gleichgültig, in welcher Weise λ_n ins Unendliche wächst, und es folgt

$$6) \quad \lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_0^\infty{}^{\nu} a_{\nu+\varkappa} x^{\nu+\varkappa} \frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!} = \lim_{t=\infty} e^{-t} \frac{d^\varkappa}{dt^\varkappa} \varepsilon(t, x) = 0.$$

Daraus folgt, daß auch die Differenz der beiden Grenzwerte

$$\lim_{t=\infty} e^{-t} \frac{d^\varkappa}{dt^\varkappa} E(t, x) \quad \text{und} \quad \lim_{t=\infty} e^{-t} \frac{d^\varkappa}{dt^\varkappa} \varepsilon(t, x)$$

existiert und somit ergibt sich endlich

$$\begin{aligned}
\lim_{t=\infty} e^{-t} \frac{d^\varkappa}{dt^\varkappa} (E(t,x) - \varepsilon(t,x)) &= \lim_{t=\infty} \frac{d^\varkappa}{dt^\varkappa} E(t, x) \\
&= \lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_0^\infty{}^\nu a_{\nu+\varkappa} x^{\nu+\varkappa} \sum_{\nu+2}^\infty{}^\lambda \frac{t^\lambda}{\lambda!} + \sum_0^{\varkappa-1}{}^\nu a_\nu x^\nu \\
&= \lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_1^\infty{}^\nu a_{\nu+\varkappa-1} x^{\nu+\varkappa-1} \sum_{\nu+1}^\infty{}^\lambda \frac{t^\lambda}{\lambda!} + \sum_0^{\varkappa-1}{}^\nu a_\nu x^\nu \qquad 7) \\
&= \lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_0^\infty{}^\nu a_{\nu+\varkappa-1} x^{\nu+\varkappa-1} \sum_{\nu+1}^\infty{}^\lambda \frac{t^\lambda}{\lambda!} + \sum_0^{\varkappa-2}{}^\nu a_\nu x^\nu \\
&= \lim_{t=\infty} e^{-t} \frac{d^{\varkappa-1}}{dt^{\varkappa-1}} E(t, x)
\end{aligned}$$

Aus der Existenz des Grenzwertes links folgt diejenige des Grenzwertes rechts, womit der Hardysche Satz bewiesen ist.

Hat man eine summable Reihe mit von Null verschiedenem Konvergenzradius, der ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich 1 angenommen werden kann, so gestattet das Verhalten von

$$\lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu \frac{t^{\nu+1}}{\nu+1!}$$

Schlüsse auf die Lage der Singularitäten, welche sich auf dem Konvergenzkreise befinden.

Besitzt die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^{\nu+1}$ den Konvergenzradius 1, so ist

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 1. \qquad 8)$$

Wenn man sich der Terminologie des Herrn Pringsheim[1]) in dessen Arbeit über die elementare Theorie der ganzen tran-

[1]) Mathematische Annalen 58.

szendenten Funktionen von endlicher Ordnung bedient, so sagt diese Gleichung aus, daß die ganze transzendente Funktion, welche durch die Reihe

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1!}$$

definiert wird, dem Normaltypus 1 der ersten Ordnung angehört. Es besteht nämlich, wie in dieser Arbeit[1]) bewiesen wird, zwischen der Ordnung einschließlich dem speziellen Typus und dem Koeffizienten einer durch eine Reihe

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} c_\nu x^\nu$$

definierten ganzen transzendenten Funktion die folgende umkehrbar eindeutige Beziehung:

Gehört die Funktion dem Normaltypus α, γ an, eine Eigenschaft, die durch folgende Ungleichungen ausgedrückt wird:

$$\left|\sum_0^\infty{}^{\nu} c_\nu x^\nu\right| < e^{(1+\varepsilon)\gamma|x|^\alpha} \quad \text{für alle } |x| > R_\varepsilon$$

$$\left|\sum_0^\infty{}^{\nu} c_\nu x^\nu\right| > e^{(1-\varepsilon)\gamma|x|^\alpha} \quad \text{für gewisse beliebig große } x,$$

so ist

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt{\nu!^{\frac{1}{\alpha}} |c_\nu|} = (\alpha\cdot\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Wendet man diesen Satz auf die ganze transzendente Funktion

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1!}$$

an, so folgt aus der Relation

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu! \frac{|a_\nu|}{\nu+1!}} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 1,$$

[1]) A. a. O., p. 207, Formel D' und p. 277, Formel III.

daß $\alpha = \gamma = 1$ ist, die Funktion also in der Tat dem Normaltypus 1 der ersten Ordnung angehören muß. Es bestehen also die beiden Ungleichungen

9a) $\left| \sum_0^\infty{}^\nu \frac{a_\nu x^{\nu+1}}{\nu+1!} \right| < e^{|x|(1+\varepsilon)}$ für alle $|x| > R_\varepsilon$

9b) $\left| \sum_0^\infty{}^\nu \frac{a_\nu x^{\nu+1}}{\nu+1!} \right| > e^{|x|(1-\varepsilon)}$ für gewisse beliebig große x,

setzt man nun $x = t \cdot e^{i\varphi}$, so gehen diese Ungleichungen über in die folgenden:

10a) $\left| \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \frac{(t \cdot e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!} \right| < e^{t(1+\varepsilon)}$ für alle $t > \tau_\varepsilon$

10b) $\left| \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \frac{(t \cdot e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!} \right| > e^{t(1-\varepsilon)}$ für gewisse, beliebig große $t \cdot e^{i\varphi}$.

Behauptung: Ungleichung 10b) gilt nur dann, wenn $e^{i\varphi}$ eine singuläre Stelle ist.

Angenommen, es sei $x = e^{i\varphi}$ eine reguläre Stelle des Konvergenzkreises $|x| = 1$ der Reihe

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu.$$

Dann existiert eine gewisse, die Peripherie dieses Konvergenzkreises überragende Umgebung dieser Stelle, in welcher gleichfalls Regularität herrscht. Der Punkt $x = R e^{i\varphi}$, in welchem der Vektor mit dem Polarwinkel φ das Summationspolygon trifft, liegt also außerhalb des Einheitskreises, d. h. es existiert der Grenzwert

$$\lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \frac{(\varrho \cdot e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!} \sum_{\nu+1}^\infty{}^\lambda \frac{t^\lambda}{\lambda!} \quad (\text{für } \varrho < R).$$

Hieraus ergibt sich unter Zuhilfenahme des Hardyschen Satzes (siehe Formel 6) für $\varkappa = 0$)

$$\lim_{t=\infty} e^{-t} \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \frac{(\varrho\, t\, e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!} = 0 \quad \text{für alle } \varrho \leq R - \delta,$$

wobei δ eine beliebig kleine positive Zahl sein darf.

Es läßt sich somit für alle $t' > \tau$ eine endliche Schranke $g > 0$ angeben, derart, daß

$$11) \qquad \left| e^{-t'} \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \frac{(\varrho\, t'\, e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!} \right| < g$$

wird. Schreibt man dann $\varrho \cdot t' = t$, so geht diese Relation über in

$$\left| e^{-\frac{t}{\varrho}} \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \frac{(t \cdot e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!} \right| < g.$$

Für einen dem Nullpunkt näher gelegenen Wert $x = \varrho' e^{i\varphi}$, $(\varrho' < \varrho)$ auf demselben Vektor ist diese Ungleichung a fortiori erfüllt und zwar wird

$$\left| e^{-\frac{t}{\varrho'}} \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \frac{(t \cdot e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!} \right| = \left| e^{\frac{t}{\varrho} - \frac{t}{\varrho'}} \right| \cdot \left| e^{-\frac{t}{\varrho}} \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \frac{(t \cdot e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!} \right|$$

$$12) \qquad < e^{\frac{t}{\varrho} - \frac{t}{\varrho'}} \cdot g$$

spezialisiert man die Werte ϱ und ϱ', indem man setzt

$$\varrho = R - \delta$$
$$\varrho' = 1$$

und bezeichnet man mit ε' die bestimmte, positive Zahl

$$\varepsilon' = 1 - \frac{1}{R - \delta},$$

so folgt aus Ungleichung 12)

$$13) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \frac{(t \cdot e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!} < g \cdot e^{t(1-\varepsilon')} < e^{t(1-\varepsilon)},$$

wenn $\varepsilon < \varepsilon'$ ist.

Ungleichung 10b) kann also für reguläre Stellen $e^{i\varphi}$ des Einheitskreises nicht erfüllt sein.

Da aber die Notwendigkeit des Bestehens dieser Ungleichung für gewisse Werte $e^{i\varphi}$ sich aus der Tatsache ergibt, daß die Funktion

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1!}$$

dem Normaltypus 1 der ersten Ordnung angehört, so müssen diejenigen Werte $e^{i\varphi}$, welche der Ungleichung 10b) genügen, singuläre Stellen der Funktion $f(x)$ mit dem Anfangselemente $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ sein.

Das Bestehen der Ungleichung 10b) ist somit eine hinreichende Bedingung für den singulären Charakter der Stelle $e^{i\varphi}$.

Es ist aber auch eine notwendige. Es läßt sich nämlich zeigen: eine Stelle $e^{i\varphi}$, für welche diese Bedingung nicht erfüllt ist, kann nie eine singuläre sein.

Angenommen, Ungleichung 10b) wäre nicht erfüllt, d. h. es wäre für alle $t > \tau$

$$14) \qquad \left| \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \frac{(t\,e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!} \right| < e^{t(1-\varepsilon)},$$

wobei ε eine beliebig kleine, aber feste Zahl ist. Dann ist aber für $0 < \delta < \varepsilon$:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \frac{(t(1+\delta)\,e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!} < e^{t(1+\delta)(1-\varepsilon)} = e^{t(1-\varepsilon')}.$$

Infolge der Beziehung

$$\frac{d}{dt}\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu ((1+\delta)\,e^{i\varphi})^{\nu+1}\frac{t^{\nu+2}}{\nu+2!} = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \frac{((1+\delta)\,e^{i\varphi}\,t)^{\nu+1}}{\nu+1!}$$

gilt dann die Ungleichung

$$\left| \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu ((1+\delta)\,e^{i\varphi})^{\nu+1}\frac{t^{\nu+2}}{\nu+2!} \right| < e^{t(1-\varepsilon')}(1-\varepsilon') - (1-\varepsilon'),$$

durch vollständige Induktion ergibt sich hieraus allgemein:

$$\left|\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu((1+\delta)e^{i\varphi})^{\nu+1}\frac{t^{\nu+\lambda}}{\nu+\lambda!}\right| < \left|e^{t(1-\varepsilon')}(1-\varepsilon')^\lambda - \sum_1^\lambda{}^\varkappa \frac{t^{\lambda-\varkappa}}{\lambda-\varkappa!}(1-\varepsilon')^\varkappa\right|$$

und nach Summation über λ von 1 bis ∞:

$$\left|\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu((1+\delta)e^{i\varphi})^{\nu+1}\sum_{\nu+1}^\infty{}^\lambda\frac{t^\lambda}{\lambda!}\right| < \left|e^{t(1-\varepsilon')}\left(\frac{1-\varepsilon'}{\varepsilon'}\right) - e^t\left(\frac{1-\varepsilon'}{\varepsilon'}\right)\right|.$$

Also

15) $$\lim_{t=\infty}\left|e^{-t}\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu((1+\delta)e^{i\varphi})^{\nu+1}\sum_{\nu+1}^\infty{}^\lambda\frac{t^\lambda}{\lambda!}\right| < \frac{1-\varepsilon'}{\varepsilon'}.$$

Bleibt aber der verallgemeinerte Grenzwert unterhalb einer endlichen Schranke, so kann die Reihe

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu((1+\delta)e^{i\varphi})^{\nu+1}$$

nicht eigentlich divergieren, die Stelle $e^{i\varphi}$ somit keine singuläre sein. Es liefern also in der Tat die beiden Ungleichungen 10a) und 10b) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Stelle $e^{i\varphi}$ eine singuläre ist. Nämlich

16a) $$\left|\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu\frac{(te^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!}\right| < e^{t(1+\varepsilon)} \quad \text{für alle } t > \tau_\varepsilon$$

16b) $$\left|\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu\frac{(te^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!}\right| > e^{t(1-\varepsilon)} \quad \text{für gewisse, beliebig große } t.$$

Nimmt man auf beiden Seiten den Logarithmus, so folgt:

17a) $$\frac{1}{t}\lg\left|\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu\frac{(te^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!}\right| < 1+\varepsilon \quad \text{für alle } t > \tau_\varepsilon$$

17b) $$\frac{1}{t}\lg\left|\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu\frac{(te^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!}\right| > 1-\varepsilon \quad \text{für gewisse, beliebig große } t.$$

Diese beiden Ungleichungen, welche ebenfalls die notwendige und hinreichende Bedingung für den singularen Charakter der Stelle $e^{i\varphi}$ liefern, bedeuten aber nichts anderes als die Aussage:

18) $$\overline{\lim_{t=\infty}} \frac{1}{t} \lg \left| \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu \frac{(t e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!} \right| = 1,$$

wie aus der Definition des oberen Limes hervorgeht.

Aus dieser notwendigen und hinreichenden Bedingung kann man nun eine lediglich hinreichende herleiten, welche sofort erkennen läßt, daß eine Funktion mit dem Anfangselemente

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x^{\nu+1}$$

nicht über den Konvergenzkreis dieser Reihe hinaus fortsetzbar ist, wenn sich eine hinlängliche große Anzahl der Reihenkoeffizienten a_ν auf Null reduziert.

Läßt man speziell in der Bedingungsgleichung 18) t ganzzahlig ins Unendliche wachsen, so läßt sie sich in die Form setzen:

19) $$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{\left| \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu \frac{(m e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!} \right|} = e.$$

Diese Relation ist aber keine notwendige Bedingung mehr, weil bei der Bildung des oberen Limes für $t = \infty$ t auch anders als ganzzahlig ins Unendliche wachsen kann.

Sei nun

$$A_m = \sum_0^{m-m_1-1}{}^{\nu} a_\nu \frac{(m e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!}$$

$$B_m = \sum_{m-m_1}^{m+m_2-1}{}^{\nu} a_\nu \frac{(m e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!}$$

$$C_m = \sum_{m+m_2}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu \frac{(m e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!}.$$

Für gewisse hinreichend große m ist dann nach Gleichung 19)

$$\left| \sqrt[m]{|A_m| + |B_m| + |C_m|} \right| > e,$$

wenn $e^{i\varphi}$ singuläre Stelle ist. Es lassen sich nun für $|A_m|$ und $|C_m|$ nach passender Wahl von m_1 und m_2 obere Schranken fixieren, derart, daß für $m > M$

$$\left.\begin{matrix}|A_m|\\|C_m|\end{matrix}\right\} < e^{m(1-\varepsilon)} \quad \text{(wobei } \varepsilon > 0 \text{ beliebig klein sein kann)}$$

wird. Dann muß aber damit Gleichung 19) bestehen, kann

$$|B_m| > \left\{\begin{matrix}|A_m|\\|C_m|\end{matrix}\right.$$

sein und folglich wird

$$20) \quad \overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{\left|B_m \cdot \left(1 + \frac{A_m}{B_m} + \frac{C_m}{B_m}\right)\right|} = \overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|B_m|} = e.$$

Infolge der Voraussetzung

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 1$$

gilt für alle a_ν die Ungleichung

$$21) \quad |a_\nu| < g(1+\delta)^\nu,$$

wobei $g > 0$ eine feste Zahl bedeutet, während δ positiv, im übrigen beliebig klein vorgeschrieben werden kann. Ist nämlich

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 1,$$

so läßt sich nach Vorgabe eines beliebig kleinen δ ein n so bestimmen, daß

$$\sqrt[\nu]{|a_\nu|} < 1 + \delta \quad \text{für alle } \nu \geqq n.$$

Also

$$|a_\nu| < (1+\delta)^\nu$$

wird. Sei ferner g das Maximum aller $|a_\nu|$ für $\nu < n$, also

$$|a_\nu| \leqq g \quad \text{für alle } \nu < n.$$

Es gilt also für alle ν die Ungleichung 21).

Zur Abschätzung von $|A_m|$ und $|C_m|$ wird ferner von den Relationen Gebrauch gemacht:

22) $$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x$$

und

23) $$\lim_{\nu=\infty}\frac{\nu}{e}\sqrt{\nu!} = 0.$$

Die letztere kann man mit Hilfe des Begriffes der Infinitärgleichheit[1]) auch in die Form setzen:

23a) $$\nu! \sim \left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu.$$

Demnach wird

$$|A_m| = \left|\sum_0^{m-m_1-1}{}^{\nu} a_\nu \frac{(m e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!}\right| < g(m-m_1)\, m^{m-m_1}\frac{(1+\delta)^{m-m_1}}{m-m_1!}.$$

Läßt man m unbegrenzt wachsen, so folgt nach Gleichung 23a)

$$g(m-m_1)\, m^{m-m_1}\frac{(1+\delta)^{m-m_1}}{m-m_1!} \sim g\cdot m\left(1-\frac{m_1}{m}\right)(1+\delta)^{m-m_1}\, m^{m-m_1}\left(\frac{e}{m-m_1}\right)^{m-m_1}$$

$$= g\cdot m\cdot(1+\delta)^{m-m_1}\, e^{m-m_1}\frac{1}{\left(1-\frac{m_1}{m}\right)^{m-m_1-1}}$$

$$\sim g\, m\,(1+\delta)^{m-m_1}\, e^{m-m_1}\cdot\left(1-\frac{m_1}{m}\right)^{m_1+1}\cdot\frac{1}{e^{-m_1}}$$

$$= g\, m\,(1+\delta)^{m-m_1}\, e^m\left(1-\frac{m_1}{m}\right)^{m_1+1},$$

soll dies kleiner werden als $e^{m(1-\varepsilon)}$, so muß

$$\lg g + \lg m + (m-m_1)\lg(1+\delta) + (m_1+1)\lg\left(1-\frac{m_1}{m}\right) < -m\,\varepsilon$$

oder

$$\lim_{m=\infty}\frac{m_1}{m}\lg\left(1-\frac{m_1}{m}\right) < -\varepsilon,$$

also

---

[1]) Siehe Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften I, A. 3, p. 75.

$$\varepsilon < -\lim_{m=\infty} \lg \left(1-\frac{m_1}{m}\right)^{m\cdot\frac{m_1}{m^2}} = -\lim_{m=\infty} \lg e^{-\left(\frac{m_1}{m}\right)^2}$$

$$= \lim_{m=\infty} \left(\frac{m_1}{m}\right)^2$$

werden.

Das heißt: es muß m_1 mit m so stark ins Unendliche wachsen, daß der Quotient

$$\frac{m_1}{m}$$

über einer beliebig kleinen, positiven Zahl η bleibt, also muß

24) $$m_1 = \eta \cdot m$$

und

25) $$A_m = \sum_0^{m(1-\eta)-1} a_\nu \frac{(m e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!}$$

gesetzt werden.

Für C_m ergibt eine analoge Rechnung

$$|C_m| = \left| \sum_{m+m_2}^{\infty} a_\nu \frac{(m e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!} \right| < g \frac{(1+\delta)^{m+m_2}}{m+m_2!} \sum_1^\infty \frac{(m(1+\delta))^\nu}{(m+m_2+1)\ldots(m+m_2+\nu)}$$

wird nun m_2 so groß angenommen, daß für alle m

$$m(1+\delta) < m + m_2$$

oder

26) $$m_2 = m \cdot \eta' > m\,\delta$$

wird, so wird die Summe

$$\sum_1^\infty \frac{(m(1+\delta))^\nu}{(m+m_2+1)\ldots(m+m_2+\nu)} < \sum_1^\infty \left(\frac{m(1+\delta)}{m(1+\eta')}\right)^\nu = \frac{1+\delta}{\eta'-\delta},$$

also

$$|C_m| < g \frac{(m(1+\delta))^{m+m_2}}{m+m_2!} \frac{1+\delta}{\eta'-\delta}$$

und

$$g\frac{(m(1+\delta))^{m+m_2}}{m+m_2!}\frac{1+\delta}{\eta'-\delta}\sim g(m(1+\delta))^{m+m_2}\left(\frac{e}{m+m_2}\right)^{m+m_2}\frac{1+\delta}{\eta'-\delta}$$

$$=g(1+\delta)^{m+m_2+1}e^{m+m_2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{m_2}{m}\right)^{m+m_2}}\cdot\frac{1}{\eta'-\delta}$$

$$\sim g(1+\delta)^{m+m_2+1}e^{m}\cdot\left(1+\frac{m_2}{m}\right)^{-m_2}\cdot\frac{1}{\eta'-\delta}.$$

Soll dies kleiner werden als $e^{m(1-\varepsilon)}$, so muß

$$\lg g+(m+m_1+1)\lg(1+\delta)-m_2\cdot\lg\left(1+\frac{m_2}{m}\right)-\lg(\eta'-\delta)<-\varepsilon m$$

sein, für alle m.

Da aber nach Ungleichung 26) $\eta'-\delta>0$ ist, so ist diese Bedingung sicher erfüllt, wenn

$$\lim_{m=\infty}\frac{m_2}{m}\lg\left(1+\frac{m_2}{m}\right)=\lim_{m=\infty}\lg\left(1+\frac{m_2}{m}\right)^{m\cdot\frac{m_2}{m^2}}=\lim_{m=\infty}\left(\frac{m_2}{m}\right)^2>\varepsilon.$$

Nach Gleichung 26) ist aber

$$\lim_{m=\infty}\frac{m_2}{m}=\eta',$$

es muß also η' so groß genommen werden, daß gleichzeitig

$$\eta'>\delta \quad \text{und} \quad \eta'^2>\varepsilon$$

ist. ε und δ sind beliebig klein, also ist die Bedingung $\eta'>0$ hinreichend dafür, daß

27) $$|C_m|=\left|\sum_{m(1+\eta')}^{\infty\,\nu}a_\nu\frac{(m\,e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!}\right|<e^{m(1-\varepsilon)}$$

wird.

Aus Gleichung 20) folgt somit als hinreichende Bedingung für den singulären Charakter der Stelle $e^{i\varphi}$:

28) $$\overline{\lim_{m=\infty}}\sqrt[m]{\left|\sum_{m(1-\eta)}^{m(1+\eta')-1\,\nu}\frac{a_\nu(m\,e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!}\right|}=c.$$

Man kann nun einen Fall angeben, in welchem diese Bedingung sicher für alle Werte von φ erfüllt ist.

Ist nämlich $m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots$ eine Folge wachsender natürlicher Zahlen, welche der Bedingung genügen:

$$29) \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{m_\nu - m_{\nu-1}}{m_{\nu-1}} > a > 0$$

und sind in der Reihe

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^{\nu+1}$$

die Koeffizienten a_ν nur dann von Null verschieden, wenn $\nu = m_\nu$, also

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^{\nu+1} = \sum_0^\infty{}^\nu a_{m_\nu} x^{m_\nu+1},$$

so kann man infolge der Bedingung 29) ein λ so bestimmen, daß

$$\left.\begin{array}{ll} 30\,a) & m_{\lambda-1} < m_\lambda(1-\eta) \\ & \text{und} \\ 30\,b) & m_{\lambda+1} > m_\lambda(1+\eta') \end{array}\right\} \text{für hinreichend große Werte von } \lambda,$$

wenn η und η' positive, beliebig kleine Zahlen sind.

Es ist nämlich nach Ungleichung 29)

$$m_\lambda - m_{\lambda-1} > a \cdot m_\lambda.$$

Also

$$m_{\lambda-1} < m_\lambda(1-a) < m_\lambda(1-\eta),$$

wenn

$$\eta < a;$$

ersetzt man hierin λ durch $\lambda + 1$, so folgt:

$$m_\lambda < m_{\lambda+1}(1+a)$$

$$m_{\lambda+1} > m_\lambda\left(\frac{1}{1-a}\right) = m_\lambda(1+a') > m_\lambda(1+\eta'),$$

wenn

$$\eta' < a'.$$

Setzt man in Formel 28) $m = m_\lambda$, so geht sie über in

31) $$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[m_\lambda]{\left| \sum_{m_\lambda(1-\eta)}^{m_\lambda(1+\eta')-1} a_\nu \frac{(m_\lambda e^{i\varphi})^{\nu+1}}{\nu+1!} \right|} = e.$$

Diese Summe enthält aber nach Ungleichung 30a) und 30b) nur ein Glied, wird also von φ unabhängig und es ergibt sich endlich

32) $$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[m_\lambda]{|a_{m_\lambda}|} \sqrt[m_\lambda]{\frac{m_\lambda^{m_\lambda+1}}{(m_\lambda+1)!}} = \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[m_\lambda]{|a_{m_\lambda}|} \cdot e = e$$

für jede Stelle $e^{i\varphi}$ des Einheitskreises.

Lebenslauf.

Ich wurde geboren am 19. November 1887 zu München als Tochter des Universitätsprofessors Rudolf Schöll und seiner Frau gebornen Locher.

Nach dreijährigem Besuch der Sickenbergerschen Gymnasialkurse erhielt ich im Sommer 1907 das Zeugnis der Reife am K. Maxgymnasium zu München und widmete mich vom Herbste 1907 an an der Universität zu München dem Studium der Mathematik. Es sei mir erlaubt allen Herren Professoren und Privatdozenten, deren Vorlesungen und Übungen ich besuchte, an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen. Zu ganz besonderem Grade verpflichtet fühle ich mich Herrn Geheimrat Pringsheim für die reiche Anregung und tätige Förderung, die er mir sowohl in der Zeit meines Studiums als auch besonders während der Ausarbeitung meiner Dissertation angedeihen ließ.